

## CAPITOLO VIII

## FOTOGRAMMETRIA

## 1 Concetti generali.

1.1 *Semplificazione del problema della rappresentazione cartografica del territorio.*

Trattando il problema della riduzione delle distanze misurate a distanze topografiche, abbiamo visto che la distanza topografica  $d$  tra due punti A e B della superficie fisica della terra, tra i quali vi è una distanza reale in linea d'aria  $d^*$  inferiore a 5 km, può essere ritenuta uguale, a meno di quantità trascurabili, alla sua proiezione  $d'$  sul piano tangente alla sfera locale.

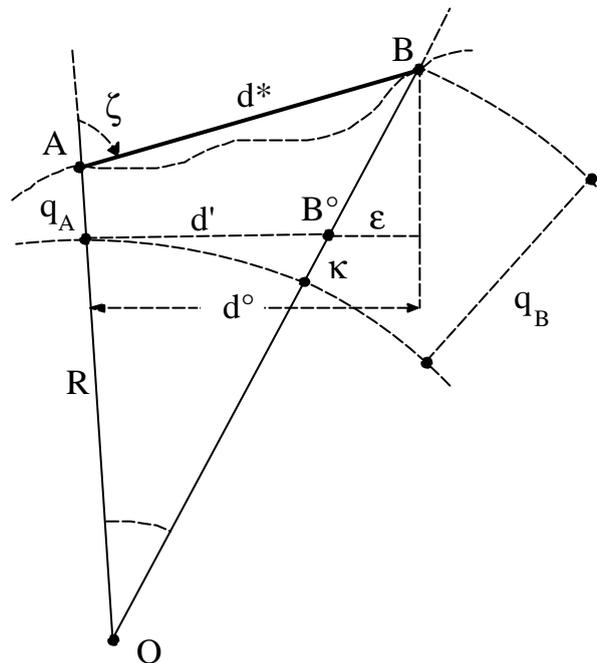


figura 1

Abbiamo visto inoltre che, sempre per valori di  $d^*$  inferiori a 5 km, la differenza  $e$  tra la distanza topografica  $d'$  e la distanza reale proiettata sull'orizzontale  $d^\circ$ , vale al massimo una ventina di centimetri, anche quando si hanno valori di  $q_A$  e della differenza  $q_B - q_A$  che tendono a massimizzare  $e$ .

La differenza  $k$  tra la quota  $q_B$  di B ed il segmento che va da B a  $B^\circ$ , intersezione della verticale per B col piano tangente, è di pochi centimetri, per  $d^*$  inferiore ad 1 km, ma aumenta più sensibilmente all'aumentare di  $d^*$ .

Vedremo però nel seguito che la fotogrammetria realizza la cartografia di un territorio comunque vasto, scomponendolo in tanti *tasselli* rettangolari di dimensioni limitate, il cui lato maggiore, nel caso della cartografia a grande scala, non supera i 2 km, e operando separatamente su ciascuno di essi.

Vedremo tra poco che ognuno di questi tasselli sarà costituito da un *modello stereoscopico*, cioè da una stessa zona di superficie di terreno riprodotta su due fotografie prese da due punti diversi dello spazio.

Vedremo poi che, anche per la cartografia a grande scala, il metodo fotogrammetrico non consente di determinare le coordinate piano-altimetriche di un punto con un errore quadratico medio inferiore a 15÷20 cm.

Se quindi consideriamo entrambi i fatti e cioè: il fatto di cartografare il territorio scomponendolo in tasselli di limitata estensione e la precisione conseguibile col metodo fotogrammetrico, possiamo ritenere trascurabili, nell'ambito di un modello stereoscopico sia  $k$  che  $k$ .

Ne consegue che, quando parliamo di realizzazione di cartografia col metodo fotogrammetrico e prendiamo in considerazione un'estensione di territorio compresa in un modello stereoscopico, possiamo dare una definizione semplificata di cosa intendiamo per rappresentazione cartografica della superficie fisica del terreno, che è la seguente:

*considerando di realizzare una cartografia fotogrammetrica con la precisione mediamente conseguibile nel campo della produzione commerciale e operando nell'ambito di un modello stereoscopico, la rappresentazione planimetrica della superficie fisica del terreno può essere assimilata alla sua proiezione ortogonale sul piano tangente alla sfera locale nel punto approssimativamente baricentrico del modello stereoscopico e la quota dei punti è assimilabile alla loro distanza da detto piano.*

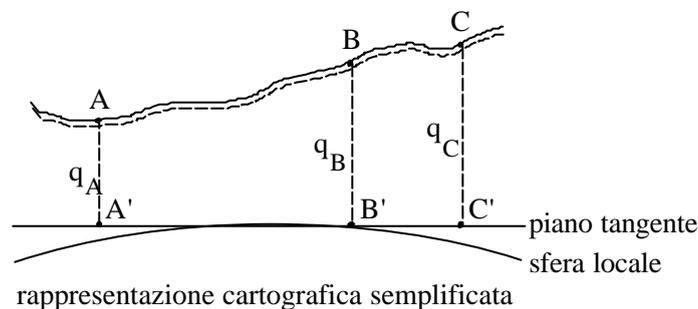


figura 2

## 1.2 Il concetto di base della fotogrammetria.

La fotogrammetria è quella tecnica che consente la ricostruzione della forma e delle dimensioni di un oggetto quando si hanno di esso due immagini fotografiche riprese da due punti diversi.

In particolare, se l'oggetto è il terreno e se le fotografie sono state riprese da un aereo, secondo particolari accorgimenti che saranno definiti nel seguito, la fotogrammetria consente:

- di ricostruire la forma e le dimensioni della porzione di terreno ripresa, di formare cioè il *modello* del terreno;

- di passare, attraverso la proiezione ortogonale del modello, alla sua rappresentazione cartografica.

Per chiarire il perché servano due fotografie di una stessa zona del terreno per realizzarne la rappresentazione cartografica e non ne basti invece una, si considerino le figure seguenti.

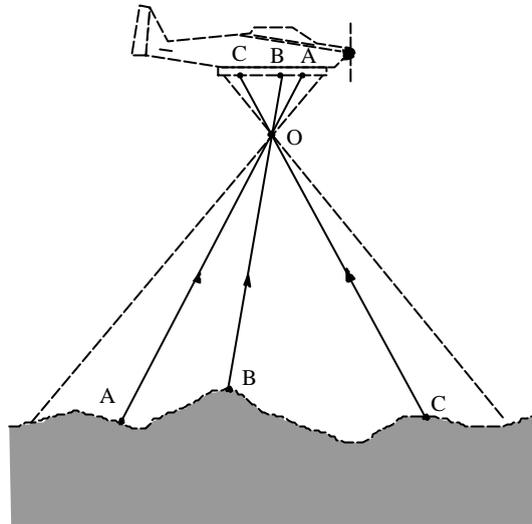


figura 3

La fotografia aerea (vedi figura 3) fornisce un'immagine del terreno che geometricamente si definisce una *proiezione centrale*, poiché i raggi che generano sulla fotografia le immagini del terreno passano tutti per uno stesso punto che è il *centro dell'obbiettivo* (più avanti sarà data spiegazione del concetto di *centro dell'obbiettivo*).

Ne consegue che, se riproiettassimo l'immagine, dal punto dello spazio O da cui è stata ripresa, sul piano tangente alla sfera locale passante per il punto centrale della zona fotografata (vedi figura 4), otterremmo una rappresentazione della superficie del terreno che ci dà un'immagine deformata, e che quindi non può essere utilizzata come una carta topografica, la quale deve essere, come abbiamo visto in premessa, la proiezione ortogonale della superficie del terreno piano tangente alla sfera locale.

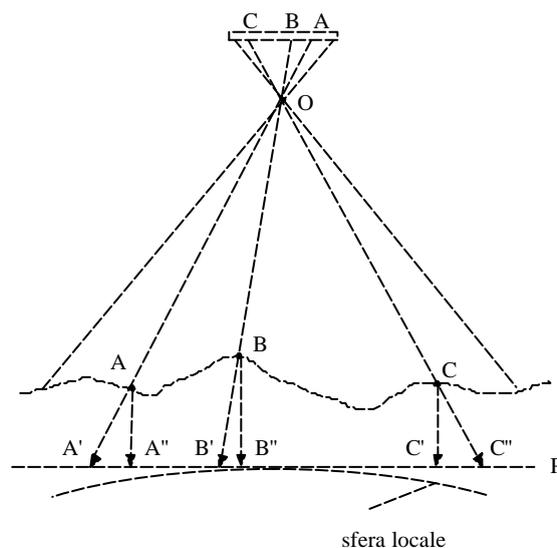


figura 4

Quando invece si hanno due fotografie che riprendono una stessa zona del terreno (vedi figura 5), il generico punto A della superficie comune ripresa, genera la sua immagine A' sulla fotografia 1 e la sua immagine A'' sulla fotografia 2; i raggi  $r_1$  ed  $r_2$  che generano dal punto A i punti A' e A'' sulle lastre 1 e 2 si definiscono *raggi omologhi*.

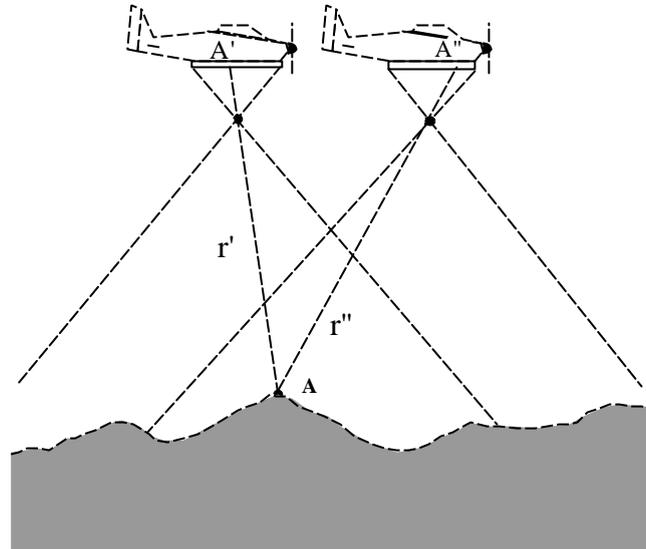


figura 5

Supponendo che la superficie fisica del terreno scompaia (il fatto è espresso dall'aver disegnata tratteggiata nella figura 6 la superficie del terreno) e che le fotografie rimanessero posizionate nello spazio così come al momento della presa, risulterebbe possibile, ricostruendo con percorso inverso i raggi omologhi, individuare ciascun punto del terreno come intersezione dei raggi omologhi ad esso relativi (vedi figura 4).

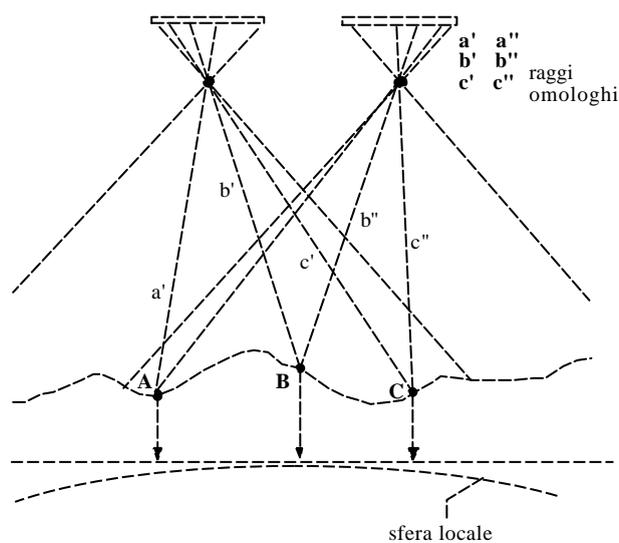


figura 6

La proiezione delle intersezioni dei raggi omologhi sul piano tangente alla sfera locale fornirebbe la rappresentazione cartografica planimetrica del terreno; inoltre la distanza dei punti dal piano tangente fornirebbe la quota dei punti.

In questo pertanto consiste il *concetto di base* della fotogrammetria; nel poter riprodurre la forma di un oggetto attraverso due sue immagini riprese da punti diversi dello spazio.

L'applicazione pratica del *concetto di base* implica che vengano risolti tre tipi di problemi:

1. la ripresa delle immagini aeree;
2. la ricostruzione, per intersezione dei raggi omologhi, del modello del terreno;
3. l'individuazione delle intersezioni dei raggi omologhi di un generico punto P e il desumere dalla posizione spaziale di detta intersezione la rappresentazione cartografica di P.

Le operazioni di cui al punto 1 riguardano il momento dell'acquisizione delle immagini, cioè il momento della *presa*; lo strumento base di questa fase operativa è la camera da presa fotogrammetrica.

Le operazioni di cui ai punti 2 e 3 riguardano la fase di *restituzione*; con questo termine (restituzione) si intende l'insieme delle operazioni che portano alla ricostruzione di un modello (analogico o analitico del terreno) e delle operazioni di misura che portano alla determinazione delle coordinate dei punti del modello e quindi alla rappresentazione cartografica del terreno.

Lo strumento di base in questa fase operativa è lo strumento restitutore fotogrammetrico, detto semplicemente *restitutore*.

### **1.3 Fotogrammetria analogica, analitica e digitale.**

#### **1.3.1 Premessa: il fenomeno fisiologico della vista**

Vale la pena di ricordare di sfuggita, senza entrare in particolari, che in pratica la fotogrammetria riproduce qualcosa di molto simile al meccanismo fisiologico della vista umana.

Tale meccanismo è basato sul fatto che quando guardiamo una scena, di questa scena se ne formano sulle nostre retine due immagini, che sono un po' diverse l'una dall'altra, poiché i punti di osservazione di ciascuna di esse, costituiti dal centro del cristallino (centri di presa), sono situati in due punti diversi dello spazio. Le immagini sulle retine sono il dato di partenza con cui poi il nostro cervello ricostruisce il modello tridimensionale della scena; il corretto posizionamento nello spazio di ogni singolo punto della scena viene calcolato dal cervello in funzione della differente posizione sulle due retine delle due immagini di ogni punto. Possiamo dire che il cervello *misura* la posizione dei due *punti immagine* riferite ad uno stesso *punto oggetto* sulle due retine, e quindi *calcola* la posizione del punto oggetto nello spazio. La posizione del punto nello spazio viene ricavata quindi con un procedimento di calcolo del cervello e non come intersezione di due raggi che, partendo dalle immagini delle retine e passando per il centro dei cristallini, vadano a creare un punto di intersezione nello spazio coincidente con la posizione del punto oggetto. Possiamo dire quindi che la parte *concreta* del fenomeno della vista fisiologica si ha solo nella ricezione delle immagini, cioè per usare un termine fotogrammetrico, solo nella *presa* delle immagini, mentre il fenomeno della

ricostruzione dell'immagine, la *restituzione* con termine fotogrammetrico, è solo un fatto mentale.

La fotogrammetria analogica e quella analitica non si differenziano per la fase di *presa*, che è la stessa per entrambe, ma per la fase di *restituzione*.

### 1.3.2 La fotogrammetria analogica.

La fotogrammetria *analogica*, a partire dalle due fotografie aeree, per ogni punto di cui vuole determinare la posizione nello spazio, ricostruisce con dei dispositivi fisici i raggi che proiettano nello spazio i due punti immagine relativi a quel punto, e determina la posizione spaziale del punto con un'operazione di misura su tale punto di intersezione; l'operazione di misura, nella fotogrammetria analogica, avviene quindi, sul modello del terreno costituito dall'insieme dell'intersezione di tutti i raggi omologhi.

Gli *strumenti restitutori analogici* ripetono fisicamente *all'inverso*, con dispositivi ottici o meccanici, il fenomeno della presa: la ricostruzione dei raggi omologhi ha cioè in essi un riscontro fisico che è *analogo* al fenomeno della presa. L'individuazione dell'intersezione dei raggi omologhi avviene mediante dispositivi ottici o meccanici e la determinazione della loro posizione rispetto ad un sistema di riferimento strumentale avviene con dispositivi meccanici. L'operazione di misura avviene cioè in uno spazio oggetto, fisicamente compreso nell'ambito dello strumento, dove si forma idealmente un modello della superficie del terreno e tale operazione consiste appunto nel determinare le coordinate dei punti di intersezione dei raggi omologhi rispetto a un sistema di riferimento strumentale.

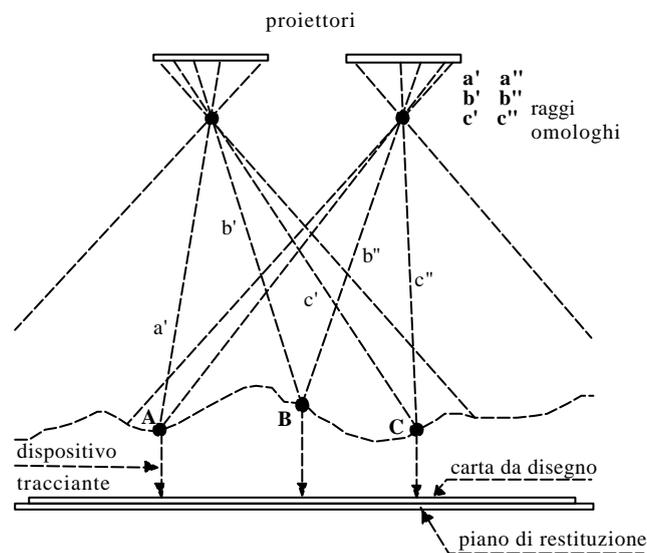


figura 7

Ad esempio uno dei primi di tipi di strumenti analogici, che lavoravano sul principio di ricostruire l'analogia del fenomeno della presa con metodo ottico, era essenzialmente costituito da due proiettori in cui si inseriva la coppia di diapositive, e da un piano su cui si appoggiava la carta da disegno e che simulava la posizione del piano tangente alla sfera locale al momento della presa; un particolare dispositivo (non facile da spiegare sinteticamente e di cui perciò tralasciamo la descrizione) consentiva di individuare l'intersezione dei raggi omologhi e di

proiettarne l'intersezione sulla carta da disegno (che diventava poi la cartografia del terreno ripreso); la distanza dell'intersezione dei raggi omologhi dal piano del disegno, eventualmente corretta dall'effetto della curvatura terrestre, forniva la quota dei punti (vedi figura 7).

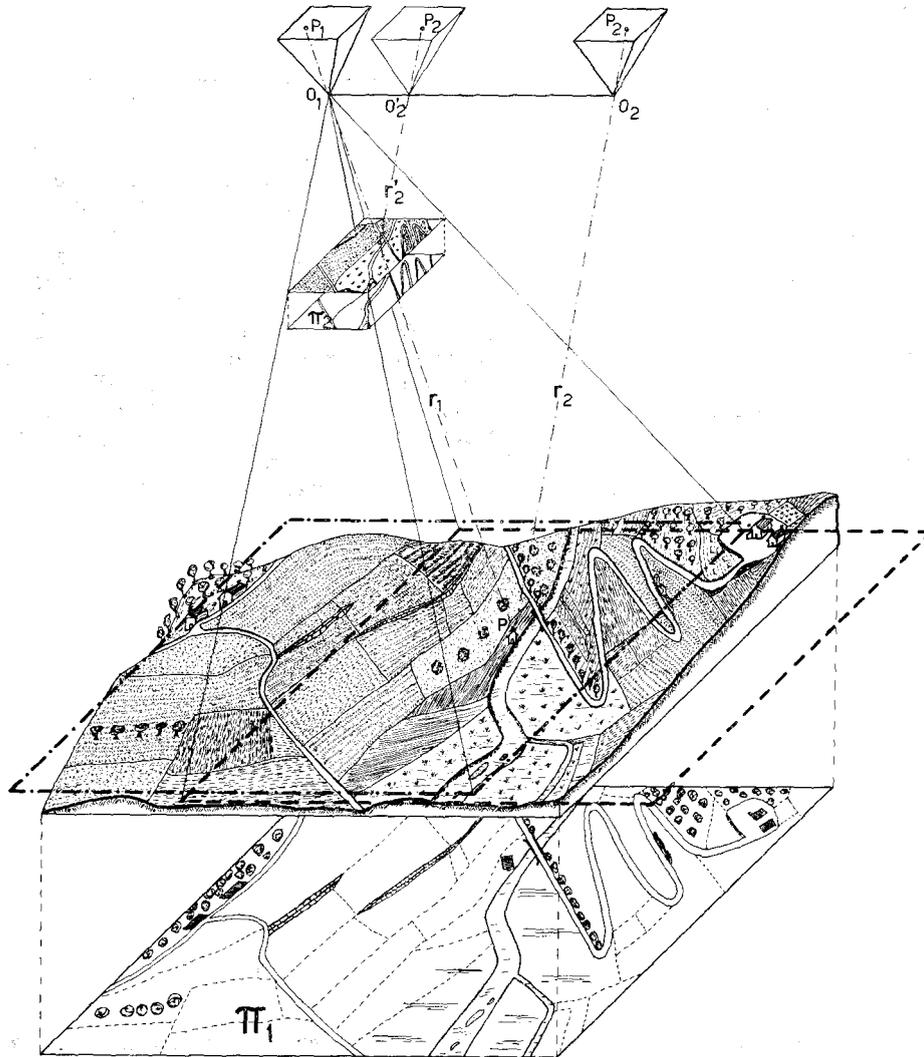


figura 7.bis

Si noti questo fatto molto importante: come indicato nella figura 7, nello strumento analogico le due camere di restituzione erano poste a una distanza molto ravvicinata rispetto a quelle che esse avevano al momento della presa; del resto non sarebbe stato certo possibile costruire strumenti delle dimensioni di centinaia di metri! Ma in effetti si davano due fortunate coincidenze:

- avvicinando le due camere da presa l'una all'altra lungo la base di presa mediante una traslazione pura (figura 7.bis) i raggi omologhi continuano ad intersecarsi; ciò significa che tale traslazione non distrugge il modello del terreno, ma ne crea uno di dimensioni ridotte;

- il cartografo non vuole rappresentare il terreno nella scala 1:1, ma in scala ridotta, quindi doveva appunto realizzare un modello del terreno in scala ridotta per poi proiettarlo sul piano dello strumento.

Questi due fatti congiunti rendevano possibile la restituzione fotogrammetrica analogica; se ad esempio si voleva realizzare una carta alla scala 1:5000 si effettuavano le riprese aeree in modo che la *base di presa* (distanza media tra i punti di presa di due fotogrammi consecutivi), divisa per 5000, fosse orientativamente uguale alla *base di restituzione*, cioè alla distanza delle due camere di restituzione nello strumento che poi si intendeva usare nella fase di restituzione; la base di restituzione poteva subire nello strumento restitutore modeste variazioni di grandezza per compensare le inevitabili irregolarità della base di presa in modo da realizzare il modello stereoscopico nella esatta scala voluta .

Il tipo più diffuso di strumento analogico, ancor oggi utilizzato nell'industria fotogrammetrica, si basa invece su un'analogia meccanica; in pratica le coppie dei raggi omologhi vengono di volta in volta materializzate da due bacchette metalliche che sono incernierate con due snodi sferici nei due punti che corrispondono ai centri di proiezione dello strumento ottico sopra descritto. Le altre due parti terminali delle due bacchette, opposte a quelle incernierate nella posizione assimilabile a quella dei centri di proiezione, sono unite tra di loro in un punto mediante un altro snodo sferico, il quale rappresenta il punto di intersezione dei raggi omologhi quando le due bacchette coincidono con due raggi omologhi. Non entriamo qui nel dettaglio di come l'operatore potesse giudicare che le due bacchette coincidessero con due raggi omologhi.

Anche se gli strumenti analogici a proiezione meccanica vengono ancora talvolta usati nella produzione della cartografia, noi non prenderemo in considerazione la *fotogrammetria analogica*, che appunto sull'uso di tali strumenti si basa, poiché tali strumenti possono oggi (anno 1996) considerarsi in via di estinzione.

### 1.3.3 La fotogrammetria analitica

La fotogrammetria analitica opera invece misurando direttamente sulle due fotografie la differente posizione delle due immagini di uno stesso punto e, con sole operazioni di calcolo (dove il nome di *analitica*), calcola la posizione spaziale del punto; il procedimento è quindi molto simile, in linea di principio, a quello della vista fisiologica, poiché anche nella fotogrammetria analitica il fenomeno è *concreto* solo nella fase di acquisizione, mentre consiste solo in una fase di calcolo in quello della *restituzione*.

Lo strumento restitutore usato nella fase di restituzione nella fotogrammetria analitica è lo strumento restitutore analitico. Una sua parte integrante e fondamentale è il calcolatore elettronico (tipo Personal Computer) dedicato all'esecuzione dei calcoli. E' anche dovuto alla necessità di disporre di una potenza di calcolo notevole inclusa nello strumento restitutore che fa sì che la fotogrammetria analitica divenga operativa solo a partire dalla metà degli '70;

Non ci dilunghiamo oltre sulla fotogrammetria analitica poiché essa costituisce appunto l'argomento principale del corso, che verrà trattato diffusamente più avanti.

### 1.3.4 *La fotogrammetria digitale.*

Ultima arrivata sulla scena è la fotogrammetria *digitale*, divenuta operativa solo a partire dei primi anni '90.

La fotogrammetria digitale si caratterizza fundamentalmente per due aspetti:

- *uso di immagini digitali* (dove il nome); anziché usare come immagini del terreno le diapositive in forma di pellicola usa delle immagini digitali ottenute sottoponendo a scansione le pellicole; queste vengono trasformate in matrici numeriche. La fotografia viene cioè idealmente suddivisa in un grigliato di piccoli quadratini (pixel); ogni quadratino viene messo in corrispondenza con un elemento di una matrice; il valore numerico di un generico elemento della matrice corrisponde all'intensità di grigio (se la pellicola è in bianco e nero) o al colore (se la pellicola è a colori) che è presente nel quadratino che gli corrisponde.
- *eliminazione dello strumento restitutore fotogrammetrico*, che viene sostituito dal computer.

A parte queste due caratteristiche, dal punto di vista concettuale la fotogrammetria digitale è simile alla fotogrammetria analitica, poiché anch'essa adotta il principio di effettuare l'operazione di misura sulle immagini e di ricavare per via analitica le coordinate dei punti oggetto.

Attualmente (anno 1996) la fotogrammetria digitale è stata adottata da alcuni importanti centri europei di produzione cartografica; in Italia, per ora, non trova ancora impiego nel mondo della produzione. Si può prevedere però che in un futuro molto prossimo (dieci anni?) col progredire della tecnologia del computer che renderà disponibili memorie di massa sempre più a buon mercato per memorizzare le immagini digitali e maggior potenza di calcolo per elaborarle, la fotogrammetria digitale soppianderà ogni altro tipo di fotogrammetria.

Riteniamo quindi essenziale dare qualche cenno anche di questa nuova tecnica (paragrafo 4 di questo stesso capitolo)

### 1.3.5 *Fotogrammetria aerea e fotogrammetria terrestre*

Per illustrare l'argomento abbiamo finora supposto che le immagini fotografiche da cui origina il processo fotogrammetrico fossero riprese da una camera fotografica (in realtà *fotogrammetrica* come vedremo tra poco) situata a bordo di un aereo. In questo caso, di prese effettuate da aereo, dovremmo però specificare che siamo nel campo della fotogrammetria aerea; infatti esiste anche una fotogrammetria *terrestre*, che è quella che si ha quando le prese vengono fatte da terra con apparati fotografici simili a quelli con cui si fa della fotografia amatoriale.

La fotogrammetria terrestre trova largo impiego in tanti settori, dal rilevamento architettuale, al rilevamento di pezzi nel settore meccanico (largo impiego nel settore automobilistico), al settore, al settore medico, ecc. ecc..

Nella trattazione che segue, quando parleremo di fotogrammetria, intenderemo la fotogrammetria aerea, anche se molti dei concetti, delle apparecchiature e delle metodologie di lavoro, possono intendersi riferite anche alla fotogrammetria terrestre.

## 1.4 *L'acquisizione del dato primario: i fotogrammi.*

### 1.4.1 *Le fotografie aeree in uso nella fotogrammetria.*

Le fotografie aeree che vengono utilizzate per la produzione di cartografia devono presentare requisiti ben precisi che dipendono:

- dalle caratteristiche geometriche delle camere di presa;
- dai metodi di attuazione delle riprese;
- dalle emulsioni fotografiche adottate.

Le fotografie che hanno queste particolari caratteristiche, che saranno definite in dettaglio nel seguito, si definiscono *fotogrammi* e vengono utilizzate tanto in strumenti di tipo analogico come per fotogrammetria analitica.

### 1.4.2 *La camera fotogrammetrica.*

Una camera fotogrammetrica è una camera fotografica molto complessa e di notevoli dimensioni e peso.

Le sue caratteristiche più salienti sono:

- il formato dell'immagine, di forma quadrata, ha il lato di 230 mm e quindi la sua area è sessanta volte maggiore di quella del negativo che si ottiene con una comune macchina fotografica amatoriale di formato (24 x 36) mmq;
- la macchina è dotata di un grande magazzino porta pellicola, che può contenere pellicole lunghe sino a 250 piedi (circa 80 m), e di dispositivi che consentono un'elevata automazione delle operazioni di ripresa;
- le immagini che da essa si ottengono sono metricamente corrette perché la distorsione dell'obbiettivo è praticamente nulla;
- la camera possiede dei riferimenti geometrici intrinseci alla sua struttura che materializzano un sistema di riferimento rispetto al quale è possibile definire la posizione dei punti immagine in termine di coordinate cartesiane;
- poiché la quota di volo di un aereo che esegue riprese fotogrammetriche è, come minimo, di alcune centinaia di metri, il terreno è sempre molto lontano dalla camera da presa (a distanza iperfocale); essa è quindi a fuoco fisso e la sua focale è, in generale, di 150 mm; solo da pochi anni, e limitatamente a rilevamenti speciali, vengono impiegate anche camere con focali maggiori (220 e 300 mm).

#### *a) Schematizzazione della camera da presa*

L'ottica di una camera fotogrammetrica è molto complessa e viene definita in funzione di diversi parametri; per non appesantire la trattazione verrà qui usata una schematizzazione semplificata della geometria interna della camera da presa, che, oltre ad essere sufficiente alla comprensione della trattazione che segue, non si discosta molto dalla realtà.

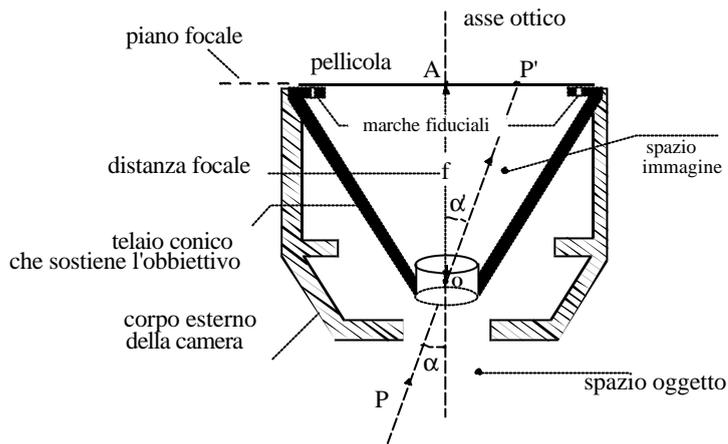


figura 8

Adottando questa **schematizzazione semplificata** possiamo dire (vedi figura 8) che:

- esiste un centro dell'obiettivo  $O$ , che assumeremo come punto di simmetria tra stella di raggi oggetto (cioè quelli che vengono riflessi dal terreno e colpiscono l'obiettivo) e stella di raggi immagine (cioè quelli che, dopo aver attraversato l'obiettivo, vanno a impressionare la pellicola);
- esiste un asse ottico dell'obiettivo che è costituito dalla retta su cui giacciono i centri di tutte le calotte sferiche che delimitano la forma di tutte le lenti semplici da cui l'obiettivo è formato;
- l'asse ottico dell'obiettivo è ortogonale al piano su cui giace la pellicola da impressionare, piano che a sua volta coincide con il piano focale della camera da presa;
- l'obiettivo ha una focale  $f$  che assumiamo essere la distanza del centro dell'obiettivo dal piano focale;
- la distanza  $p$  del piano della pellicola dal centro dell'obiettivo è detta *distanza principale*; poiché la camera da presa è a fuoco fisso, la distanza principale ha un valore costante, coincidente con quello della distanza focale  $f$ ;
- l'angolo  $\alpha$  formato tra un raggio che proviene da un punto  $P$  dello spazio oggetto e l'asse ottico, è uguale a quello  $\alpha'$  formato dal raggio immagine e dall'asse ottico, il che significa che assumeremo l'obiettivo come esente da qualsiasi tipo di distorsione.

All'interno della base quadrata del tronco di cono che sostiene l'obiettivo, si trova una cornice, che serve d'appoggio alla pellicola; su tale cornice vi trovano quattro forellini; al momento della presa della fotografia la luce passa attraverso i quattro forellini, che quindi appariranno come quattro piccoli puntini bianchi su fondo nero, sulla diapositiva ottenuta sviluppando il negativo. Il diametro dei puntini è di qualche decimo di millimetro. Questi forellini (e anche le loro immagini sui fotogrammi) sono detti *marche fiduciali* e servono a materializzare un sistema di *riferimento interno* della camera da presa.

Sempre adottando una **visione semplificata** della geometria interna della camera da presa possiamo dire che:

- l'asse ottico dell'obiettivo interseca il piano focale in un punto  $A$ , detto punto principale, che coincide con l'intersezione dei due segmenti ideali che congiungono le due coppie di marche fiduciali.

Nelle camere da presa le marche possono trovarsi in posizione mediana dei quattro lati del telaio su cui si appoggia la pellicola, oppure in corrispondenza degli angoli del telaio, o in entrambi le posizioni contemporaneamente, e in tal caso se ne avranno otto.

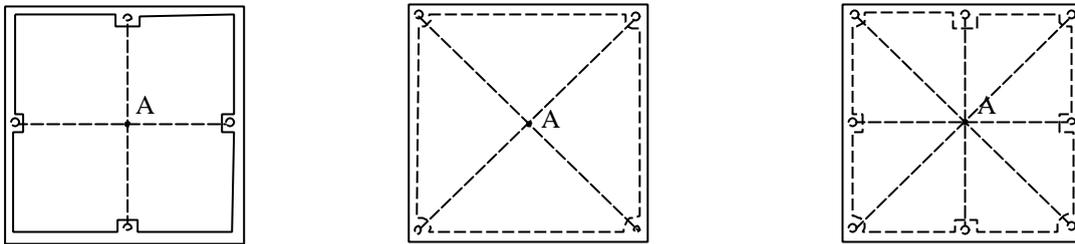


figura 9

Nel seguito si supponrà di trovarsi nel primo caso, per il semplice fatto che sarà più evidente la funzione delle marche come elemento fisico che materializza il *sistema di riferimento interno* della camera da presa.

b) Parti che costituiscono la camera da presa.

Le parti delle quali è costituita una camera per effettuare riprese aeree fotogrammetriche, sono indicate nella figura 10

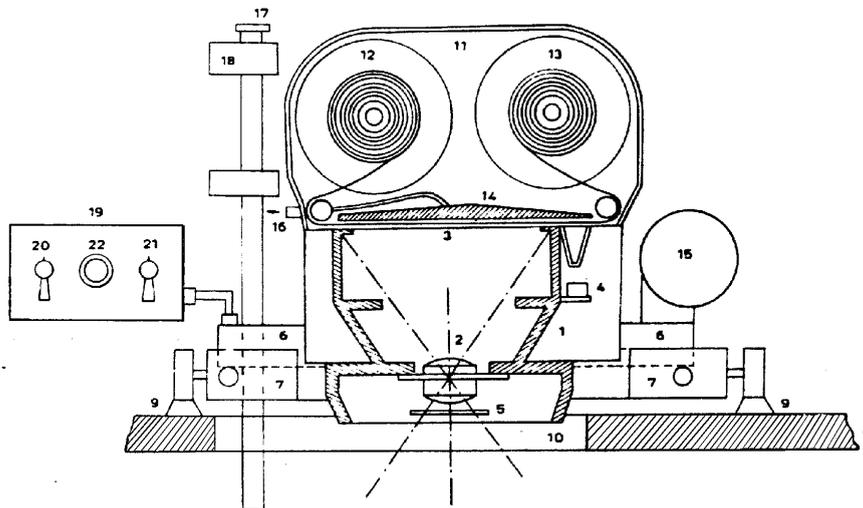


figura 10

- la camera propriamente detta o cono (1) costituita possibilmente in monoblocco ed avente il compito di collegare nel modo più rigido possibile l'obbiettivo (2), al quadro (3) della camera, cioè al piano della prospettiva, sul quale sono fissati i quattro indici che servono a

definire il punto principale e che, illuminati dalla luce che attraversa l'obiettivo nel momento dell'esposizione, verranno registrati sulla superficie sensibile. Fanno inoltre parte del cono l'otturatore, il diaframma e gli strumenti di registrazione (4), cioè l'orologio, la livella, l'altimetro ed il conta-fotogrammi, che vengono riprodotti sul bordo del fotogramma ad ogni esposizione: l'utilizzatore potrà quindi conoscere l'assetto della camera mediante l'immagine della livella sferica, l'ora in cui è avvenuta l'esposizione, la quota di volo assoluta ed il numero progressivo di ogni fotogramma.

- Il dispositivo di sospensione (7), mediante il quale la camera è fissata elasticamente al pavimento (8) del veicolo, con tamponi di gomma (9), sopra la botola (10). Il quadro interno della sospensione può essere livellato secondo due direzioni perpendicolari fra di loro agendo su due manopole di comando.
- Il magazzino del film (11), che viene collegato rigidamente al cono nella sua parte superiore, la scatola del magazzino contiene il rocchetto di alimentazione (12), sul quale è avvolto il film vergine, il rocchetto ricevitore (13) ed il piatto di spianamento (14) del film con il dispositivo depressore. Il trascinamento del film avviene mediante un motore (15), che ad ogni impulso elettrico proveniente da una scatola di comando, mette in rotazione il rocchetto ricevitore e trascina quindi una porzione di film pari al formato del quadro sul quale si adagia.

In un istante successivo il piatto di spianamento, sollevato durante il movimento di trascinamento, si abbassa sul dorso del film e fa sì che il lato emulsionato venga a diretto contatto con il quadro del cono. La superficie del piatto a contatto con il dorso del film è provvista di scanalature o di fori, attraverso i quali, con un dispositivo a pompa (16), si crea una depressione che mantiene il film aderente al piatto stesso sino a che non è avvenuta l'esposizione.

- L'ottica di osservazione (17). Rigidamente collegato al telaio della camera vi è di solito un cannocchiale, mediante il quale il fotografo osserva sulla verticale il terreno durante la ripresa e controlla, con un traguardo appositamente dimensionato contenuto nel campo visivo, che la zona fotografata corrisponda a quella stabilita in sede di progetto del volo.
- L'intervallometro (18). Per ottenere una copertura fotografica regolare che riproduca omogeneamente tutta la regione in studio secondo le necessità fotogrammetriche, bisogna imporre alla camera una cadenza di esecuzione dei fotogrammi. Mediante l'intervallometro, senza bisogno di misurare tempi o eseguire calcoli, l'osservatore impone la cadenza di ripresa desiderata.
- Il pannello di comando della camera (19). L'azionamento della camera viene effettuato agendo su manopole appartenenti ad un pannello di comando che può far parte della camera ma che in diversi casi è separato da essa. I comandi principali servono per la messa in azione e l'arresto della camera (20), per l'esecuzione di fotogrammi singoli o di fotogrammi in serie con diverse cadenze (21), per la regolazione della cadenza di scatto (22).

### 1.4.3 I fotogrammi prodotti da una camera fotogrammetrica.

L'immagine fotografica ottenuta mediante una camera fotogrammetrica si definisce fotogramma. Un fotogramma è dal punto di vista geometrico una proiezione centrale. L'immagine del terreno ripresa ha una scala media che dipende dalla distanza principale della camera da presa e dalla quota di volo; detta  $Q$  la quota di volo assoluta e  $q$  la quota media del terreno, entrambe espresse in metri, e assunta pari a 0,150 m la focale della camera da presa, la scala media del fotogramma risulta dalla relazione:

$$\frac{1}{s_f} = \frac{0.150}{Q - q_m}$$

Si parla di scala media di un fotogramma e non semplicemente di scala poiché la scala alla quale il terreno è rappresentato può variare all'interno di un unico fotogramma. Si consideri infatti il caso in cui la porzione di terreno fotografata comprenda una valle incassata tra due pareti; il fondo valle sarà la zona di terreno più lontana dalla macchina da presa, e quindi la sua immagine sarà a scala più piccola delle creste dei monti che delimitano la valle, le quali, trovandosi a quota maggiore, saranno più vicine alla camera da presa e saranno pertanto a scala maggiore. Se, ad esempio, la quota di volo assoluta  $Q$  è di 2500 metri, il fondovalle è a quota 500 metri e le creste dei monti che delimitano la valle sono a 1300 metri, si avrà per il fondovalle la seguente scala:

$$\frac{1}{s_f} = \frac{0.150}{2500 - 500} = \frac{1}{13000}$$

mentre per le creste dei monti si avrà:

$$\frac{1}{s_f} = \frac{0.150}{2500 - 1300} = \frac{1}{8000}$$

Al momento dello scatto dell'otturatore, oltre alle quattro marche fiduciali, vengono impressionati su fotogramma, lungo uno dei suoi lati:

- un *numero progressivo di contatore*, utile per ricostruire la sequenzialità dei fotogrammi; infatti mentre il negativo viene conservato in rotolo, le diapositive, o le stampe su carta, vengono stampate singolarmente nel formato 240 x 240 mm (230 x 230 mm utili);
- l'immagine di un *altimetro* indicante con un margine di errore di  $\pm 100$  m, la quota assoluta di volo dell'aereo; dal lato dell'altimetro, nota la quota media del terreno ripreso, si può ricavare una buona stima della scala media del fotogramma;
- un *datario*, cioè una finestrella con la data in cui il fotogramma è stato ripreso; è compito del fotografo di bordo scrivere al momento dell'inizio delle riprese, la data del giorno nel datario, in modo che la sua immagine risulti sui fotogrammi. La presenza della data sul fotogramma permette di controllare che le riprese siano state fatte nell'intervallo di tempo previsto dal contratto; consente inoltre di conoscere quando le foto sono state scattate nel caso di impiego in tempi successivi da persone che non ne conoscono con esattezza l'origine. È importante però che la data presente sul bordo del fotogramma risulti anche sul negativo del fotogramma e non solo sulla diapositiva o sulla stampa su carta, il che indicherebbe che la data è stata stampata sulla diapositiva o sulla stampa su carta successivamente alla ripresa aerea e che quindi è scarsamente attendibile;

- l'immagine di un *orologio* indicante l'ora in cui il fotogramma è stato ripreso; l'ora è sempre quella solare, anche quando si è in regime di ora legale. Anche questa indicazione è importante perché le ore utili per le riprese aeree vengono fissate nel capitolato;
- l'immagine di una *livella sferica*, che permette di giudicare se l'aereo al momento della ripresa del fotogramma avesse un assetto regolare di volo;
- il valore della *distanza principale* della camera fotogrammetrica.

#### 1.4.4 *Le onde elettromagnetiche dello spettro della luce visibile, dell'infrarosso vicino e dell'infrarosso termico.*

Un'onda elettromagnetica è un flusso di energia che viene originato da una sorgente e si propaga nello spazio. Il sole è una sorgente di onde elettromagnetiche che producono l'effetto fisiologico chiamato luce. Quando la luce del sole ci giunge direttamente, essa non ha alcun colore particolare (si dice che è luce bianca); l'insieme di tutte le onde elettromagnetiche che compongono la luce bianca si chiama spettro della luce visibile, o anche semplicemente spettro; le onde elettromagnetiche dello spettro hanno una lunghezza d'onda variabile.

La luce solare nel suo complesso è assimilabile al suono che proviene da un'orchestra, nella quale coesistono toni acuti, medi e bassi; come con appositi dispositivi è possibile assorbire parte del suono e mettere in evidenza i vari toni, così con opportuni filtri ottici si può filtrare la luce solare e osservare separatamente parti limitate dello spettro; queste si differenziano perché sono composte da onde elettromagnetiche che hanno diversa lunghezza d'onda e assumono varie tonalità di colore (dal blu, al verde, al rosso ) mano a mano che aumenta la lunghezza d'onda delle onde che compongono la parte di spettro considerata.

Quando la luce solare cade su un oggetto, questo agisce come un filtro; parte della luce viene assorbita dall'oggetto stesso e parte viene riflessa; poiché però gli oggetti assorbono la luce solare in quantità differenti e in parti diverse dello spettro, la luce che riflettono non è bianca ma colorata; per questo noi diciamo che gli oggetti hanno un colore; in realtà il loro colore è quello della parte dello spettro della luce bianca che essi non assorbono. In particolare un oggetto ci appare bianco quando riflette tutte le onde dello spettro e nero quando le assorbe tutte.

Come nel campo delle onde acustiche esistono gli ultrasuoni, cioè onde che hanno le stesse caratteristiche di quelle sonore, ma che non sono percepibili dall'orecchio umano, così abbiamo onde elettromagnetiche che hanno caratteristiche simili a quelle dello spettro della luce solare, sono emesse dal sole e sono in parte assorbite e in parte riflesse dalle superfici sulle quali incidono, ma non sono visibili dall'occhio umano; esse sono dette dell'*infrarosso vicino*; la parola infrarosso deriva dal fatto che tali onde elettromagnetiche hanno lunghezza d'onda un po' più grande di quella parte dello spettro della luce visibile che, singolarmente presa, assume colorazione rossa; la parola *vicino* indica che esse, come lunghezza d'onda, vengono subito dopo quelle dello spettro visibile.

Le onde dell'infrarosso vengono più o meno riflesse dalle superfici sulle quali incidono a seconda della natura di queste ultime.

In particolare è interessante il comportamento della vegetazione nel riflettere tali onde: l'intensità di riflessione delle onde infrarosse da parte delle foglie di una pianta o dell'erba o di una coltivazione agricola in genere è, infatti, funzione non solo del tipo di vegetale, ma anche

del suo livello di crescita, dello stato di salute, della composizione litologica del suolo sul quale si trova, dello stato di umidità del suolo e di altri fattori.

Valutando quindi su una fotografia, mediante un opportuno codice cromatico, la quantità di onde infrarosse riflesse dalla vegetazione, è possibile ottenere una quantità di informazioni utili non solo agli agronomi o ai forestali, ma anche ai geologi, agli idrologi ed in generale ai tecnici preposti alla sistemazione del suolo ed alla salvaguardia dell'ambiente.

Un terzo gruppo interessante è quello delle onde elettromagnetiche dell'*infrarosso termico*. A differenza di quelle dei primi due gruppi, le onde dell'infrarosso termico non provengono dal sole e non vengono riflesse dagli oggetti, ma vengono emesse dagli oggetti stessi in funzione della loro temperatura (da qui l'aggettivo *termico*).

Anch'esse hanno lunghezza d'onda superiore alle onde dello spettro della luce visibile che danno la sensazione del rosso, e perciò vengono dette dell'infrarosso. La loro lunghezza d'onda è superiore anche a quella delle onde dell'infrarosso vicino e come queste ultime non sono visibili all'occhio umano; inoltre, a differenza delle onde dell'infrarosso vicino, non sono neppure in grado di impressionare le emulsioni fotografiche (esistono tuttavia opportuni strumenti in grado di rilevarle e metodi per visualizzarle).

Poter visualizzare le onde dell'infrarosso termico è utile tutte le volte che si vuol rilevare un fenomeno che si evidenzia soltanto dal suo stato termico; si pensi, ad esempio, al problema dell'individuazione di sorgenti di acqua dolce in mare lungo una costa: l'affioramento dell'acqua della sorgente nell'acqua marina non è rilevabile visivamente, però provoca localmente una variazione di temperatura. Poter rilevare rapidamente, da un mezzo aereo, vaste superfici di mare con uno strumento in grado di captare le onde dell'infrarosso termico permette quindi d'accertare la presenza delle sorgenti.

Indicheremo nel seguito con la sigla IR le onde elettromagnetiche dell'infrarosso vicino e con quella IRT quelle dell'infrarosso termico; abbrevieremo inoltre in OE il termine onde elettromagnetiche ed in LdO quello lunghezza d'onda.

#### **1.4.5 Le pellicole fotografiche.**

Le pellicole attualmente disponibili per le riprese aeree sono le seguenti: bianco e nero negativo; colore negativo; colore invertibile; infrarosso bianco e nero negativo; infrarosso falso colore invertibile.

Le pellicole negative sono quelle che, sviluppate, si presentano in forma di negativo, dalle quali si ottiene poi, con un secondo passaggio di stampa su altra pellicola o su carta, il positivo.

Le pellicole invertibili sono invece quelle che, una volta sviluppate, si presentano in forma di diapositiva; per ottenere da queste altre copie si deve effettuare una stampa o su pellicola invertibile o su carta invertibile. Generalmente quando la ripresa aerea è effettuata per ricavare i fotogrammi per la costruzione di una cartografia, si utilizza la pellicola bianco e nero negativa, dalla quale si ottengono poi alcune serie di stampe in bianco e nero ed una serie di diapositive per la restituzione fotogrammetrica. Quando invece la ripresa aerea è effettuata per fotointerpretare particolari aspetti del territorio, si utilizza la pellicola a colori (negativa o invertibile).

Dal punto di vista della qualità, la pellicola invertibile a colori è superiore a quella negativa; quest'ultima però consente la produzione di stampe a colori con minor costo. Pertanto se si prevede di dover effettuare una distribuzione in più copie delle foto aeree, è meglio scegliere la pellicola a colori negativa, mentre se l'impiego delle fotografie è limitato alla restituzione fotogrammetrica o ad uno studio di fotointerpretazione da parte di un solo ente, è meglio utilizzare quella invertibile.

Le pellicole all'infrarosso bianco e nero ed all'infrarosso falso colore vengono impiegate per scopi speciali, quando cioè si deve effettuare un'indagine fotointerpretativa per studiare fenomeni connessi alla vegetazione, all'idrologia, ecc..

*Pellicola in bianco e nero (b&n)*

E' costituita da uno strato di emulsione steso su un supporto di base, sensibile a tutte le onde elettromagnetiche dello spettro, ma non a quelle dell'IR.

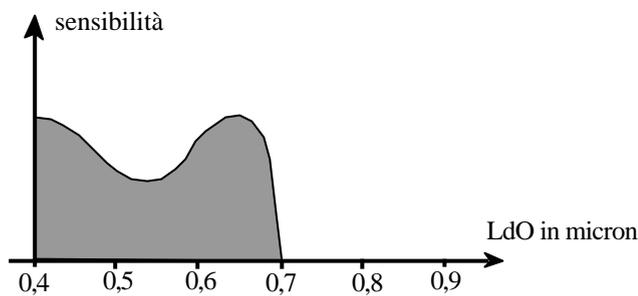


figura 11.a - curva sensitometrica di una pellicola in b&n

*Pellicola all'infrarosso in b&n*

L'emulsione è sensibile a tutte le OE dello spettro ed anche alle OE dell'IR vicino; la curva sensitometrica è rappresentata in figura 11.b.

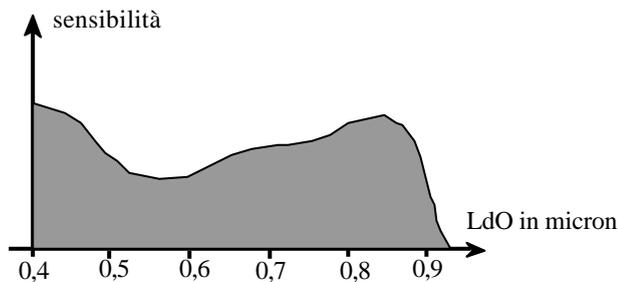


figura 11.b - curva sensitometrica di una pellicola all'infrarosso b&n

*Pellicola a colori*

Ha tre strati di emulsione: uno sensibile alle OE comprese tra 0,4 - 0,5 micron, uno sensibile alle OE di LdO comprese tra 0,5 - 0,6 micron ed uno alle OE di LdO comprese tra 0,6 - 0,7 micron.

Poiché le OE comprese in questi tre campi danno rispettivamente la sensazione di luce blu, verde, rossa, si dice che nella pellicola a colori vi è uno strato sensibile al blu, uno al verde ed uno al rosso. La curva sensitometrica è pertanto composta da tre curve, una per ogni strato (vedi figura 11.c).

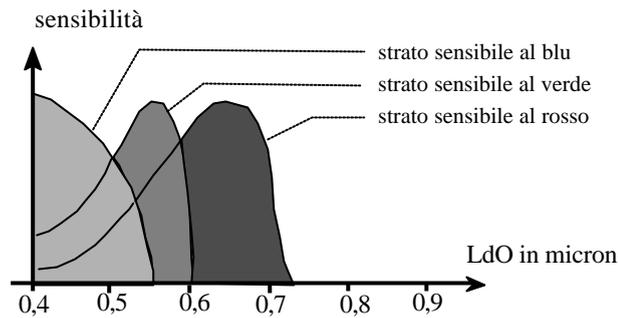


figura 11.c - curva sensitometrica di una pellicola a colori

Il meccanismo mediante il quale avviene la riproduzione a colori di una immagine mediante l'uso delle pellicole a colori è abbastanza complesso ed esula dai nostri interessi; brevemente si può dire che la luce riflessa da un oggetto sensibilizza in modo diverso i tre strati della pellicola; questa, una volta sviluppata, quando viene illuminata da luce bianca, assorbe parte di questa luce in modo che il colore dell'immagine dell'oggetto riprodotto sulla fotografia sia uguale a quella dell'oggetto che l'ha generata.

L'impiego principale delle pellicole a colori si ha nella fotointerpretazione.

#### *Pellicola all'infrarosso falso colore (Irfc)*

Ha tre strati di emulsione

- uno sensibile alle OE 0,5 - 0,6 micron (verde)
- uno alle OE 0,6 - 0,7 micron (rosso)
- uno alle OE 0,7 - 0,9 micron (IR);

tutti gli strati sono inoltre sensibili alle OE 0,4 - 0,5 micron (blu), che vengono eliminate anteponendo all'obbiettivo all'atto della presa un filtro giallo: ciò che ha colore blu appare quindi nero su una pellicola all'Irfc.

La curva sensitometrica della pellicola è rappresentata nella figura 11.d

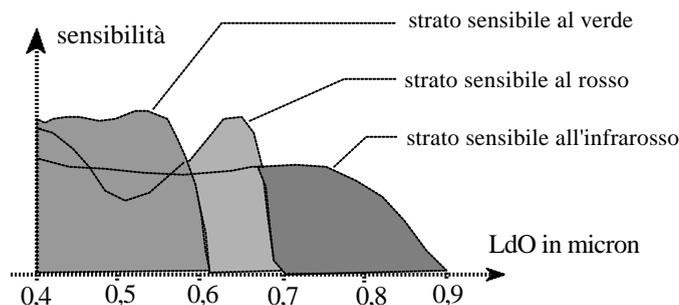


figura 11.d - curva sensitometrica di una pellicola all'infrarosso falso colore

Durante lo sviluppo, la colorazione dei tre strati viene ottenuta in modo che l'intensità di riflessione dell'IR si manifesti con il colore rosso perché l'occhio umano distingue le sue sfumature meglio di quelle del blu o del verde, di conseguenza, essendo questa pellicola impiegata per indagini sulla vegetazione, si è ritenuto opportuno utilizzare lo strato di emulsione che si trasforma in colore rosso per registrare le OE dell'IR. La composizione chimica della pellicola è, inoltre, fatta in modo che gli oggetti rossi compaiono di colore verde, e quelli verdi di colore blu.

Come già detto, questa pellicola è particolarmente adatta alla fotointerpretazione, in particolare per indagini che riguardano la vegetazione (classificazione di colture, esame del loro stato di sviluppo per previsione di produzione; rilevamento tempestivo di casi di infestazione, ecc.).

### 1.5 Schema di ripresa fotogrammetrica.

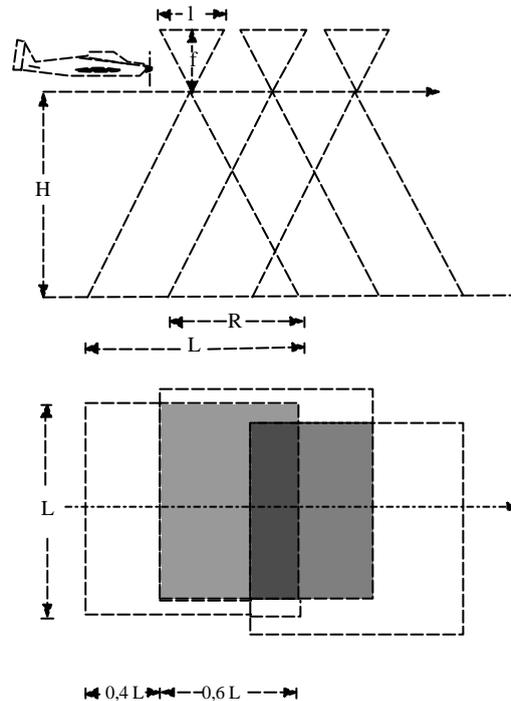


figura 12.a

L'aereo sorvola il terreno ad una quota relativa  $H$ ; vengono riprese delle fotografie del terreno in modo che ogni punto del terreno compaia su due fotografie; ciò si ottiene facendo sì che ogni fotografia ricopra al 60% la parte di terreno che compare sulla precedente. Nelle figure  $L$  è il lato della zona di terreno (all'incirca quadrata) ripresa sul fotogramma;  $R$  è il ricoprimento longitudinale che è uguale al 60% di  $L$ ;  $l$  è il lato del fotogramma (230 mm);  $f$  è la focale della camera di ripresa (in genere 150 mm).

L'aereo sorvola il terreno eseguendo delle *strisciate* di fotogrammi secondo lo schema illustrato alle successive figure 12.b e 13. L'interasse  $i$  tra due strisciate viene scelto in modo che le strisciate si ricoprano per il 20% ( $r =$  ricoprimento trasversale) questo sempre per garantire la totale copertura fotografica del terreno da cartografare.

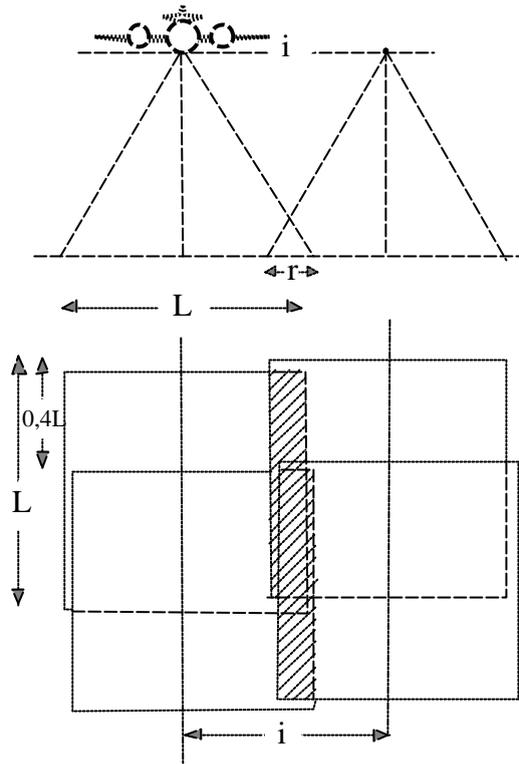


figura 12.b.

Supponiamo che la zona da rilevare sia l'area contornata in figura dalla linea tratteggiata; il percorso dell'aereo sarà quello indicato dalla linea continua; i tratti rettilinei all'interno della zona da rilevare costituiscono gli *assi* delle strisciate.

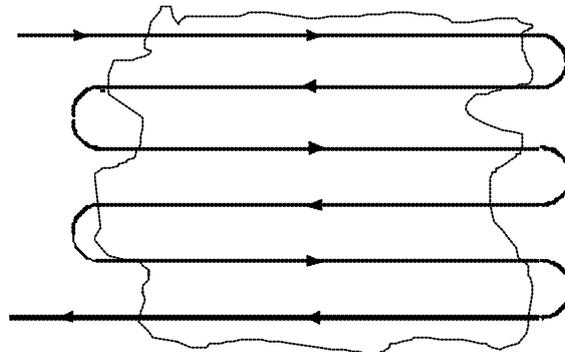


figura 13.a - schema di volo

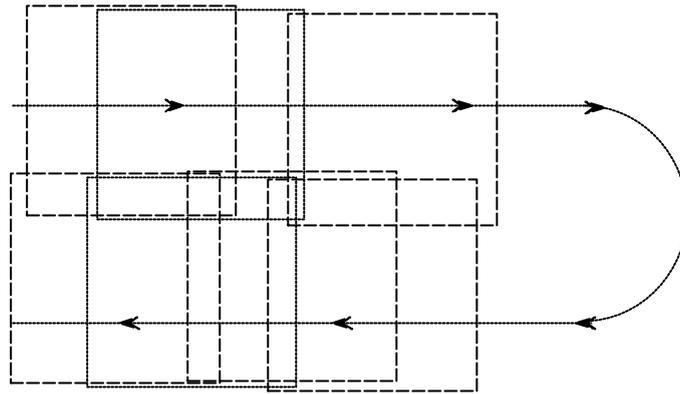


figura 13.b - copertura fotogrammetrica

A causa del ricoprimento longitudinale del 60% e di quello trasversale del 20%, il numero di fotogrammi di una copertura fotogrammetrica è molto superiore a quello che sarebbe necessario per una semplice copertura fotografica.

### 1.6 *Le condizioni meteorologiche e le riprese da aereo.*

In un intero anno solare il numero di giornate utili a riprese fotografiche aeree per la costruzione di cartografia di base è limitato dalle condizioni meteorologiche e dai periodi stagionali.

Per l'esecuzione di una ripresa aerofotogrammetrica è necessaria infatti:

- l'assenza di nubi, che creano zone cieche se al di sotto della quota di volo, oppure di ombra se al di sopra;
- l'assenza di foschia, che impedisce la navigazione a vista e provoca un decadimento non tollerabile nella qualità dell'immagine fotografica;
- l'assenza di vento forte, che non permette di mantenere l'aereo in assetto di volo regolare;
- un'inclinazione sull'orizzonte dei raggi del sole non inferiore ai 30°; un'inclinazione inferiore provoca ombre troppo lunghe e troppo intense che ostacolano la corretta interpretazione dei fotogrammi.

Oltre a queste condizioni meteorologiche occorre poi scartare per le zone in pianura il periodo estivo, nel quale la vegetazione è molto sviluppata e copre molti particolari del terreno, e, per quelle di montagna, il periodo dell'innevamento.

Per rendere l'idea di quali sarebbero le condizioni ideali per una ripresa aerea fotogrammetrica, potremmo dire che il tempo ideale si avrebbe nelle ore a cavallo del mezzogiorno di una serena giornata di giugno, con l'aria tersa come in una ventosa giornata di marzo, ma senza il vento che c'è generalmente in questo mese; inoltre lo stato di sviluppo della vegetazione dovrebbe essere quello di febbraio. Da questo paradossale esempio si può ricavare che le giornate utili per le riprese fotogrammetriche sono poche nell'arco di un intero anno solare. In Italia non sono mai state fatte statistiche al riguardo, ma si può ipotizzare, in base all'esperienza che, presa a caso una zona sul territorio nazionale, non si registrano per essa più di 30 giornate utili per la sua ripresa aerofotogrammetrica.

Questo elemento vincolante, non è generalmente noto ai committenti, che pensano quindi di poter realizzare lavori di cartografia di base nell'arco di qualche mese mentre nella maggior parte dei casi passano già alcuni mesi dal momento in cui viene stipulato il contratto d'appalto a quello in cui si verificano le condizioni idonee alla ripresa aerea.

Vi sono invece più giornate utili per i voli quando le riprese aeree fotografiche vengono eseguite per la costruzione di cartografia tematica. Infatti, pur rimanendo validi tutti gli altri vincoli, cade quello riguardante il limitato sviluppo della vegetazione; anzi, per una delle indagini più frequentemente richieste per la pianificazione del territorio, quella sulla destinazione d'uso del suolo e la classificazione delle colture, può convenire che la coltura sia in avanzato stato di sviluppo. Risulta quindi utile, ai fini delle riprese aeree, anche tutto il periodo estivo, il più favorevole sotto il profilo meteorologico.

## 2. Fotogrammetria analitica.

Come detto precedentemente la fotogrammetria analitica è basata sul principio di determinare la posizione spaziale di un punto di cui se ne abbiamo le immagini su due fotogrammi, direttamente in termini di coordinate, attraverso operazioni di calcolo che hanno, come dati di input fondamentale, le coordinate delle due immagini del punto espresse in un sistema di riferimento materializzato nella camera da presa e che quindi rimane costante per tutti i fotogrammi.

### 2.1 Il sistema di riferimento interno della camera da presa.

La fotogrammetria analitica richiede che la posizione dei punti immagine sui fotogrammi venga espressa in termini di coordinate cartesiane tridimensionali rispetto ad un sistema di riferimento materializzato da elementi fisici della camera da presa stessa, che chiameremo nel seguito **sistema di riferimento interno**.

Con riferimento alla schematizzazione semplificata della camera da presa che è stata data al punto 1.41 di questo capitolo, il **sistema di riferimento interno** è così definito:

- origine del sistema coincidente con il centro dell'obbiettivo;
- asse z coincidente con l'asse ottico dell'obbiettivo;
- assi x ed y paralleli alle congiungenti delle marche fiduciali; viene assunto come asse x quello che congiunge le marche che si trovano sui due lati del fotogramma che sono approssimativamente paralleli alla direzione di volo.

Poiché la pellicola giace nel piano focale, detta  $f$  la focale dell'obbiettivo, la coordinata z di un generico punto immagine è uguale ad  $f$  se si considera l'immagine negativa e pari a  $-f$  se si considera l'immagine positiva.

Nel seguito si considererà sempre l'*immagine positiva* del fotogramma, poiché in effetti sono le diapositive ottenute dal negativo che vengono utilizzate negli strumenti restitutori; pertanto il valore z dei punti immagine sarà sempre assunto pari a  $-f$ .

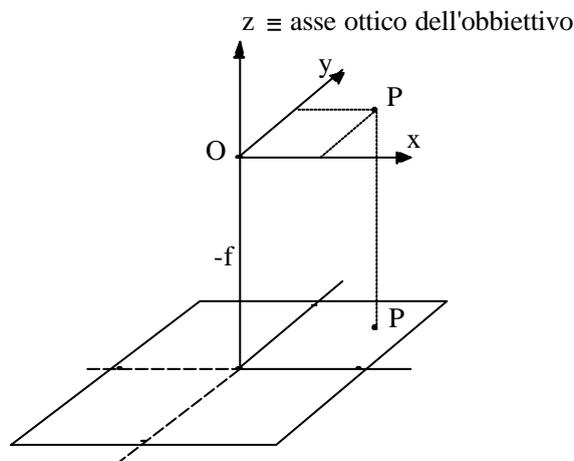


figura 14

Notiamo infine che nel seguito si commetterà spesso un'impresione, per motivi di praticità; e cioè in alcuni grafici di supporto alla trattazione si disegneranno gli assi  $x$  ed  $y$  del sistema di riferimento interno, come giacenti nel piano dell'immagine positiva, come appunto indicato in figura 15.a); mentre per l'esattezza in tale piano gli assi dovrebbero essere indicati con la simbologia  $//x$  e  $//y$  come in figura 15.b), per evidenziare che in tale piano non giacciono gli assi  $x$  ed  $y$  del sistema di orientamento interno, ma degli assi ad essi paralleli.

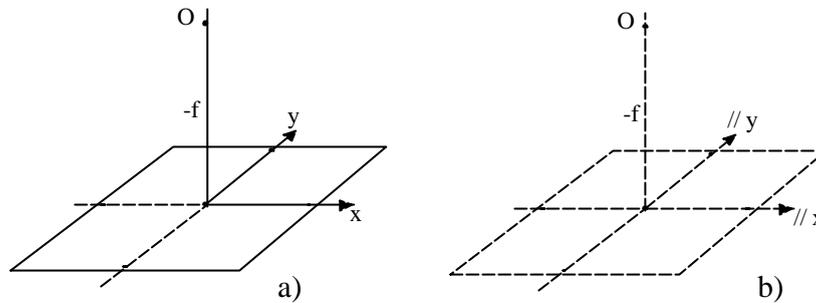


figura 15

## 2.2 Lo strumento restitutore analitico.

Lo strumento restitutore analitico si compone:

- di una *struttura ottico-meccanica* finalizzata alla misura delle coordinate  $x, y$  dei punti immagine su una coppia di fotogrammi
- di un *calcolatore elettronico*, sul quale risiedono i programmi che costituiscono il software di gestione dello strumento, e che esegue i calcoli previsti da tali programmi; il calcolatore, di tipo personal computer, è dotato di monitor che serve come interfaccia strumento-operatore e per la visualizzazione della cartografia che viene prodotta nella fase di restituzione fotogrammetrica
- di un *plotter* che traccia su carta il risultato della restituzione; questa periferica è però ormai raramente inclusa nelle componenti del restitutore poiché la produzione su carta avviene fuori linea (cioè dopo la fase di restituzione) dopo che il risultato della restituzione ha subito delle elaborazioni che sono il risultato della fase di *ricognizione* e di *editing* (il significato di questi due termini verrà spiegato più avanti).

La parte ottico-meccanica dello strumento è costituita da due strutture gemelle, ciascuna delle quali composta come illustrata nella figura 16.

Vi sono due guide fisse vincolate alla struttura esterna dello strumento, esse sono indicate in figura con le lettere  $A_1$  e  $A_2$ ; su queste due guide fisse è appoggiato un primo carrello  $C_1$  che può traslare lungo di esse; su questo carrello si trovano due guide, indicate in figura con le lettere  $B_1$  e  $B_2$ ; su queste due guide trasla un secondo carrello  $C_2$ , detto carrello *portalastra*, poiché su di esso si appoggia una delle due diapositive (le diapositive vengono a volte impropriamente chiamate *lastre* poiché una volta dal negativo si ricavano le diapositive su vetro, non disponendosi di supporti indeformabili per la stampa delle diapositive).

Due motori, comandati tramite pulsanti dall'operatore, consentono di far traslare i due carrelli  $C_1$  e  $C_2$  sulle rispettive coppie di guide.

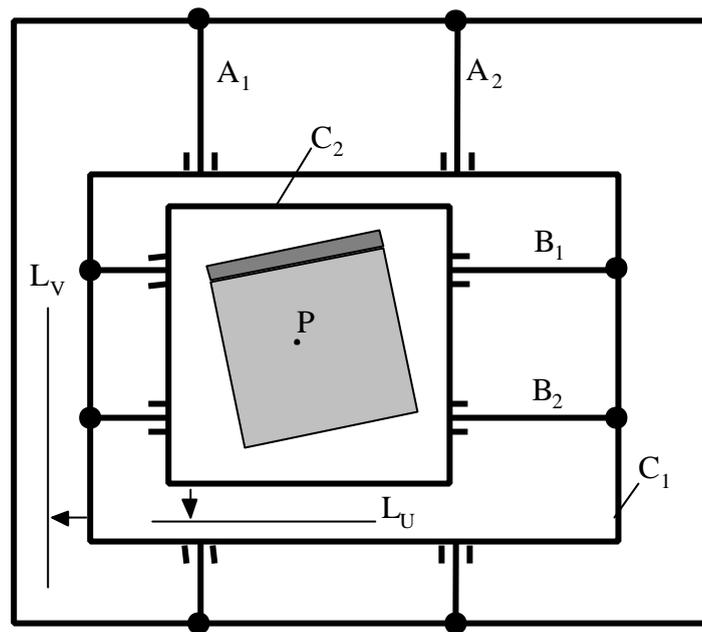


figura 16

Fissa al telaio dello strumento vi è una graduazione elettronica  $L_V$  su cui scorre un sensore di lettura automatica della graduazione solidale al carrello  $C_1$ ; solidale al carrello  $C_2$  vi è una seconda guida elettronica su cui scorre un sensore di lettura automatica della graduazione  $L_U$ . Queste due guide materializzano il sistema di riferimento strumentale (U,V) per la lettura delle coordinate della diapositiva di sinistra\* .

Sopra a questi dispositivi, in posizione mediana rispetto al campo di escursione dei due carrelli (figure 17.a e 17.b) vi è un traguardo di lettura fisso, costituito da una lente con un puntino nero inciso su di essa, detto *marca di collimazione* o semplicemente *marca*, di circa un decimo di millimetro di diametro (non si confonda la *marca stereoscopica* con le *marcche fiduciali* della camera da presa!).

\* Nella trattazione useremo la terminologia *fotogramma di sinistra e fotogramma di destra*; deve essere chiaro che questa terminologia è strettamente funzionale alla spiegazione della materia. In realtà una ripresa fotogrammetrica si compone di decine o centinaia di fotogrammi, ripresi secondo lo schema a strisciate indicato al punto 1.3.5 di questo Capitolo. Quindi sarebbe più corretto ogni volta dire: *consideriamo due qualsiasi fotogrammi consecutivi di una strisciata e indichiamoli con  $i$  ed  $i+1$ , ecc. ecc.* Per brevità di esposizione li chiamiamo invece *fotogramma di sinistra* e *fotogramma di destra* e differenziamo i parametri ad essi relativi con i pedici  $_1$  e  $_2$  anziché  $_i$  e  $_{i+1}$ .

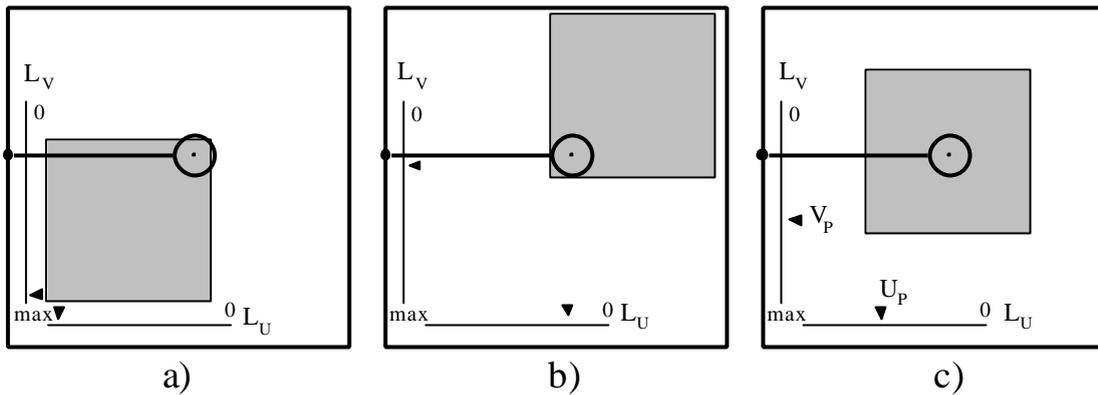


figura 17

Facendo traslare la diapositiva, mediante il movimento dei due carrelli  $C_1$  e  $C_2$ , sotto la marca nelle due direzioni  $U, V$ , è possibile portare in corrispondenza della marca stereoscopica qualsiasi punto della diapositiva.

Il sistema è calibrato in modo che, in ogni istante, vengano attribuite al punto che si trova in corrispondenza della marca, le coordinate  $U_P, V_P$  che vengono lette dai due sensori sulle graduazioni elettroniche  $L_U$  ed  $L_V$ . (figura 17.c)

Nella figura 17 si sono indicate tre posizioni dei carrelli che portano sotto la marca di collimazione tre diversi punti del fotogramma.

Il dispositivo descritto viene detto *a ottica fissa e lastra mobile*, poiché appunto l'ottica di osservazione sta ferma e si muove la lastra mediante i carrelli  $C_1$  e  $C_2$ . Da un punto di vista concettuale potrebbe sembrare più semplice realizzare un dispositivo *a lastra fissa e a ottica mobile* in cui la diapositiva sta ferma e la marca stereoscopica si muove sopra di essa. In realtà non è così; infatti la parte di diapositiva che cade sotto la lente su cui è incisa la marca deve venir portata all'occhio dell'operatore attraverso un complicato sistema di lenti e di prismi; nel sistema *a ottica mobile* questo sistema ottico in movimento sarebbe molto costoso da realizzare e da tenere rettificato; è meno costoso invece realizzare la parte meccanica che fa muovere la lastra (i carrelli) e tenerla rettificata.

Tra poco vedremo come, dalle coordinate strumentali  $U_P, V_P$  di un generico punto  $P$  della diapositiva, sia possibile passare alla determinazione delle sue coordinate lastra  $x_P, y_P$  nel sistema interno della camera da presa

Nello strumento restitutore analitico vi sono due apparati come quello appena descritto, affiancati l'uno all'altro; su uno viene posto il fotogramma di sinistra e sull'altro quello di destra.

Questi due apparati ottico meccanici, costituiscono la parte di misura dello strumento fotogrammetrico analitico.

Le coordinate strumentali di un generico punto  $P$  del terreno che appare sulla diapositiva di sinistra e sulla diapositiva verranno indicate rispettivamente con la seguente notazione:

$(U_P, V_P)_S$  e  $(U_P, V_P)_D$ .

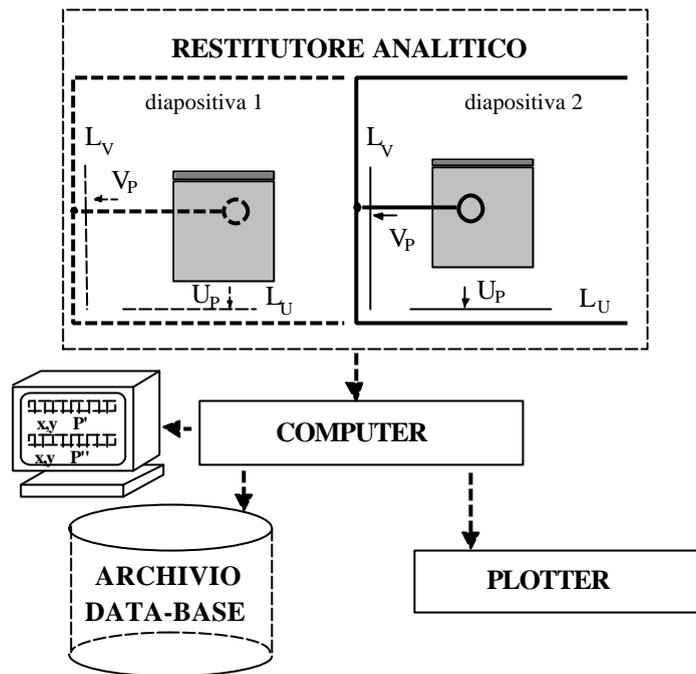


figura 18

Per ognuno dei due apparati, un sistema ottico trasporta l'immagine della marca, e della porzione di diapositiva che cade sotto la lente su cui la marca è incisa, ad uno degli occhi dell'operatore; in pratica l'operatore appoggia gli occhi ad una specie di binocolo che gli consente di vedere la diapositiva di sinistra con il solo occhio sinistro e la diapositiva di destra col solo occhio destro. Per mezzo di questo artificio, l'operatore non ha la sensazione di osservare due distinte immagini del terreno, ma *vede* un'immagine *tridimensionale* del terreno; infatti il nostro apparato fisiologico visivo rimane ingannato dall'artificio e ricrea nel nostro cervello un'immagine tridimensionale del terreno come se guardassimo il territorio dall'alto e si formassero sulle due retine due diverse immagini di esso. Senza entrare troppo nel particolare, sottolineiamo il fatto che l'effetto di tridimensionalità con cui l'operatore vede il modello di terreno, è molto esasperato rispetto a una visione diretta dall'alto. Ciò è dovuto al fatto che la distanza tra i punti di presa dei due fotogrammi è dello stesso ordine di grandezza della distanza dell'oggetto (il terreno) che viene fotografato; poiché la distanza tra i punti di presa è assimilabile alla distanza interpupillare nella visione fisiologica, l'aumento di effetto stereoscopico è paragonabile a quello che si avrebbe nella visione diretta se guardassimo la realtà che ci circonda con una distanza interpupillare di qualche metro!

Inoltre (e anche di questo fatto tralasciamo la spiegazione perché troppo complicata e influente sulla trattazione che segue) quando di uno stesso punto  $P$  del terreno, l'immagine  $P'$  sul fotogramma di sinistra si trova sotto la marca di sinistra e l'immagine  $P''$  sul fotogramma di destra si trova sotto la marca di destra, l'operatore vede la marca come un unico puntino nero *appoggiato* sul punto  $P$  del modello stereoscopico del terreno.



figura 19 - un operatore allo strumento.

Da ciò ne consegue che: quando l'operatore vuole *collimare un punto*, il che significa portare le due immagini  $P'$  e  $P''$  in corrispondenza delle marche di sinistra e di destra rispettivamente, egli deve muovere i due carrelli portalastra mediante gli appositi dispositivi di comando, fino a che la marca gli appare come un puntino nero appoggiato sul punto  $P$  del modello del terreno. Questo procedimento è detto *collimazione stereoscopica*; la collimazione stereoscopica è il metodo più veloce e preciso per effettuare la collimazione di un punto.

La collimazione stereoscopica di due punti omologhi non è l'unica possibile; si potrebbe fare anche una collimazione *monoscopica* di due punti omologhi portando separatamente ciascuno di essi a sovrapporsi alla sua marca, e giudicando, per ciascuno di essi, la coincidenza tra punto e marca con una semplice operazione di traguardo.

Ad esempio durante le esercitazioni del corso di fotogrammetria, poiché gli studenti non sono esperti nella collimazione stereoscopica, li si invita a procedere come segue:

1. “chiuda l'occhio destro e, muovendo con gli appositi comandi solo il carrello portalastra di sinistra, porti la marca di sinistra su un punto del fotogramma di sinistra (ad esempio lo spigolo di una casa)”; a rigor di termini si dovrebbe dire “porti un punto sotto la marca”, perché chi si muove è il fotogramma; ma poiché l'effetto visivo che si ha quando si sposta il carrello portalastra è quello di veder scorrere la marca sul fotogramma, si usa la dizione precedente ; ciò fatto:
2. “chiuda l'occhio di sinistra e, muovendo con gli appositi comandi solo il carrello portalastra di destra, porti la marca di destra sullo stesso punto sul fotogramma di destra”;

3. “apra entrambi gli occhi e dica cosa vede”;
4. la risposta è: “vedo la marca sullo spigolo della casa”.

Lo studente ha cioè eseguito due *collimazioni monoculari* anziché una sola collimazione stereoscopica; entrambi i metodi sono validi; vedremo infatti che anche l'operatore userà la collimazione monoculare per una certa operazione in cui non ne può fare a meno; solo che, come detto, la collimazione stereoscopica è più precisa e più rapida.

*Più precisa* significa che, nella collimazione stereoscopica, le due marche vengono sovrapposte ai due punti omologhi con maggior precisione di quanto venga fatto nella collimazione monoculare; poiché *collimare un punto* significa prelevare le sue coordinate  $(U_P, V_P)_S$  e  $(U_P, V_P)_D$  dalle graduazioni elettroniche quando giudichiamo che le immagini P' e P'' di tale punto stiano sotto le due marche, è chiaro che quanto più è accurata l'operazione di sovrapposizione delle marche sui punti omologhi, tanto maggiore è la precisione con cui si determinano le coordinate strumentali  $(U_P, V_P)_S$  e  $(U_P, V_P)_D$  dei medesimi.

La qualità di uno strumento restitutore analitico dipende principalmente dalla qualità del suo sistema ottico meccanico (che ne è la componente di costo maggiore); altri fattori che ne determinano la qualità sono il software di assistenza alla restituzione e la disponibilità di altri dispositivi, tra i quali specialmente quello che consente la *superimposizione* (vedremo più avanti in cosa consiste).

Nei migliori strumenti basati sul sistema ottico-meccanico descritto, e usando la collimazione stereoscopica, è possibile determinare le coordinate strumentali  $U_P$  e  $V_P$  di un punto con un e.q.m di +/- **2 micron** su ciascuna coordinata.

Per concludere la descrizione del restitutore veniamo ora la PC (*personal computer*) ad esso associato; su di esso risiede il software che gestisce lo strumento e che elabora i dati. Attraverso il monitor, che fa da interfaccia, guida l'operatore nell'esecuzione delle varie operazioni, gestisce i dati che vengono prelevati dalle graduazioni elettroniche, esegue calcoli e visualizza sul monitor il disegno della cartografia ottenuta dai dati numerici. Le sue funzioni verranno chiarite più avanti a mano a mano che descriveremo i vari passi attraverso i quali si arriva alla costruzione della cartografia.

### **2.3 La procedura di orientamento interno di un fotogramma. Dalle coordinate strumentali alle coordinate lastra**

#### **2.3.1 La procedura semplice.**

Eseguire la procedura di orientamento interno di un fotogramma significa eseguire una serie di operazioni che portano alla determinazione dei parametri che sono necessari per passare dalle coordinate strumentali  $U_P, V_P$  di un punto immagine, alle sue coordinate  $x_P, y_P$  nel sistema di riferimento interno della camera da presa.

Nella trattazione indicheremo le coordinate strumentali con  $U_P, V_P$  e le coordinate lastra con  $x_P, y_P$  senza usare il pedice S o D, poiché la trattazione è la medesima per ciascuno dei due fotogrammi.

Considerando che il fotogramma viene appoggiato sul carrello portalastra in una posizione casuale, con i lati solo approssimativamente paralleli agli assi U,V materializzati dalle

graduazioni elettroniche  $L_U$  ed  $L_V$ , possiamo dire che la relazione che lega le coordinate di un punto immagine P nel sistema strumentale (U,V) alle coordinate del medesimo punto nel sistema di riferimento interno (x,y) sono le seguenti:

$$\begin{aligned}x_P &= x_0 + U_P \cos\alpha + V_P \sin\alpha \\y_P &= y_0 - U_P \sin\alpha + V_P \cos\alpha\end{aligned}\tag{1}$$

dove  $x_0$  e  $y_0$  sono le coordinate dell'origine del sistema (U,V) nel sistema (x,y),  $\alpha$  è l'angolo che si origina dal fatto che il fotogramma è posizionato solo approssimativamente con i lati paralleli al sistema (U,V), è cioè l'angolo formato dall'asse x con l'asse U, positivo in senso antiorario.

Come è stato al precedente punto 1, quando una Ditta che produce cartografia ordina l'esecuzione delle riprese aeree a una Ditta specializzata in questa attività, riceve, con i fotogrammi, anche copia del certificato di taratura della camera da presa, sul quale sono riportate le coordinate delle quattro marche fiduciali nel sistema interno x,y che esse stesse materializzano. Sono quindi note le coordinate  $x_i$ ,  $y_i$  delle quattro marche fiduciali della camera da presa con la quale sono stati ripresi i fotogrammi; sul certificato di taratura è anche riportata la distanza focale f che verrà usata per successivi calcoli.

Ciò premesso, quando l'operatore deve eseguire la procedura di orientamento interno, lancia tale procedura con comandi dalla tastiera del PC, dopo di che è il software di gestione che lo guida nei passi successivi. Seguendo la procedura prevista dal software di gestione, l'operatore collima monocolarmente una dopo l'altra le quattro marche fiduciali impresse sul fotogramma all'atto della presa; ad ogni collimazione il software di gestione preleva le coordinate strumentali  $U_i$ ,  $V_i$  e le memorizza.

A questo punto l'operatore lancia una procedura di calcolo che, utilizzando le (1) per le quattro coppie di valori misurati  $U_i$ ,  $V_i$ , e delle quattro coppie di valori noti  $x_i$ ,  $y_i$  precedentemente inserite da tastiera nel PC, genera un sistema di 8 equazioni nelle 3 incognite  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha$ .

La procedura di calcolo, risolvendo il sistema delle 8 equazioni con il metodo delle osservazioni indirette, determina i valori delle 3 incognite  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha$  e li memorizza per applicarli nelle procedure che seguono.

Ricordiamo che la procedura viene eseguita per il fotogramma di sinistra e poi per quello di destra, e quindi al termine della procedura si avranno i tre valori  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha$  per il fotogramma di sinistra e i tre valori  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha$  per il fotogramma di destra.

A questo punto, dopo aver cioè eseguito quanto sopra per i due fotogrammi, l'operatore chiude la procedura dell'orientamento interno. Il software di gestione *ne prende atto* e da questo momento in poi, ogni volta che l'operatore collimerà un punto P sul modello stereoscopico (il che equivale a dire *collima due punti omologhi sui due fotogrammi*), il software di gestione utilizzando le 1, e le due triplette di valori  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\alpha$  precedentemente memorizzate, trasformerà le due coppie di coordinate strumentali  $(U_P, V_P)_S$  e  $(U_P, V_P)_D$  nelle due coppie di coordinate  $(x_P, y_P)_S$  e  $(x_P, y_P)_D$ .

La procedura di orientamento interno deve essere eseguita, come prima operazione, ogni volta che si mette un fotogramma sul carrello portalastra; infatti tutti i successivi calcoli prevedono di operare sulle coordinate dei punti immagine espresse nel sistema interno della camera da presa (anche dette *coordinate lastra*); ed è appunto la procedura dell'orientamento interno che consente il passaggio tra i due sistemi: quello strumentale e quello interno della camera da presa.

Ricordiamo che, parlando della struttura della camera da presa, abbiamo detto che esistono anche camere da presa con otto marche fiduciali; in questo caso l'operatore potrà collimarle tutte otto e avere una miglior determinazione dei parametri di rototraslazione.

In realtà però il vero motivo per cui è utile avere otto marche anziché quattro sarà più chiaro dopo aver letto quanto riportato al punto che segue.

### 2.3.2 La procedura che tiene conto della deformazione della pellicola

Dobbiamo aprire a questo punto una parentesi per evidenziare questo fatto: l'immagine riprodotta sul fotogramma non è mai esattamente quella che è stata generata, come *immagine latente*, all'atto della presa. Ricordiamo che *l'immagine latente* è quella che si forma nella pellicola a seguito dell'esposizione; essa è formata dagli alogenuri d'argento sensibilizzati che durante il procedimento di sviluppo si trasformeranno in toni di grigi o in colore, a seconda del tipo di pellicola.

Noi supponiamo che l'immagine latente sia un'immagine del terreno *geometricamente corretta* perché abbiamo supposto nulla la distorsione dell'obiettivo (e non consideriamo eventuali effetti di distorsione dovuti alla rifrazione atmosferica); ma non dobbiamo dimenticare che, dopo la presa, la pellicola negativa subisce un trattamento chimico di sviluppo, durante il quale può deformarsi. Ad esempio: per effetto dell'azione di trazione che i rulli di trascinamento esercitano sulla pellicola nel farla passare da un bagno chimico all'altro, si può avere un effetto di allungamento della pellicola stessa nella direzione della sua lunghezza e un effetto di restringimento in senso trasversale alla lunghezza medesima. Successivamente si ha la stampa del negativo sulla pellicola diapositiva, la quale a sua volta in fase di sviluppo può subire ulteriori deformazioni.

Bisogna subito precisare che queste deformazioni sono sempre piccole, se rapportate alle dimensioni del fotogramma; in generale su una diapositiva la distanza tra due marche fiduciali opposte differisce dal valore nominale riportato sul certificato di taratura di quantità inferiori al decimo di millimetro. Inoltre queste deformazioni, o almeno la parte apprezzabile di esse, variano linearmente dal centro del fotogramma verso il bordo, sia nella direzione x che nella direzione y del sistema di riferimento interno.

Ipotizzando allora che l'effetto di queste deformazioni sia correggibile con una deformazione affine dei fotogrammi, nella procedura dell'orientamento interno si utilizza una espressione modificata delle formule (1), e precisamente si inseriscono in esse due coefficienti di correzione  $\lambda_x$  e  $\lambda_y$  che devono correggere l'effetto della deformazione della pellicola; le (1) diventano:

$$x_p = x_0 + \lambda_x \cdot U_p \cos\alpha + \lambda_y \cdot V_p \sin\alpha \quad (2)$$

$$y_P = y_0 - \lambda_x \cdot U_P \operatorname{sen}\alpha + \lambda_y \cdot V_P \operatorname{cos}\alpha$$

La procedura dell'orientamento interno dovrà allora determinare 5 incognite per ciascun fotogramma anziché 3; ciò è possibile disponendo delle solite quattro marche fiduciali, ma nel caso se ne abbiano 8, e cioè 4 in posizione mediana dei lati e 4 negli angoli, si ha una maggior probabilità di correggere meglio la deformazione della pellicola.

Ovviamente, in questo caso, saranno le (2) ad essere utilizzate, dopo la procedura dell'orientamento interno, per trasformare le coordinate strumentali dei punti omologhi in coordinate lastra.

## 2.4 L'equazione di collinearità

### 2.4.1 Impostazione dell'equazione di collinearità

Come è stato detto precedentemente, nella fotogrammetria analitica la ricostruzione dei raggi che proiettano i punti omologhi avviene in modo analitico; infatti abbiamo visto che nello strumento restitutore non vi è alcun dispositivo, né ottico né meccanico che riproduca fisicamente i raggi ottici che hanno generato le immagini dei punti del terreno sui fotogrammi, ma vi sono solo dei dispositivi per misurare le coordinate lastra dei punti omologhi sui due fotogrammi di una coppia stereoscopica.

Un generico raggio ottico che, al momento della presa, partendo da un punto P del terreno e passando attraverso il centro O dell'obiettivo abbia generato il punto immagine P' su un fotogramma, viene ricostruito nella fase di restituzione, con una retta che esprime questa condizione: *al momento della presa il punto P del terreno, il centro O dell'obiettivo e l'immagine latente del punto immagine P' di P sul negativo, erano allineati su una stessa retta.*

L'espressione di questa retta prende di *equazione di collinearità*.

Scrivendo l'equazione delle due rette che esprimono il concetto della collinearità per due raggi omologhi e determinandone il punto di intersezione, si ricava la posizione del punto oggetto che ha generato i due punti omologhi che ne costituiscono la sua immagine sui due fotogrammi.

Il problema che ci si pone è quello di scegliere il sistema di riferimento nel quale scrivere l'equazione di collinearità.

Adottando il concetto semplificato di rappresentazione cartografica esposto al punto 1.1 di questo capitolo, il sistema di riferimento assoluto nel quale attribuire le coordinate ai punti del terreno per una zona di territorio compresa nell'ambito di un modello stereoscopico può essere così definito:

- gli assi N,E della proiezione di Gauss, supposti giacere nel piano tangente alla sfera locale in un punto baricentrico R della zona
- un asse Q ortogonale al piano tangente parallelo alla direzione della verticale nel punto R.

In tale sistema (N,E,Q) ad ogni punto del terreno è associabile una terna di coordinate del tipo di quelle che esso avrebbe in una terna tridimensionale ortogonale (X,Y,Z); le coordinate cartografiche N,E sono assimilabili alle coordinate X,Y, mentre la quota Q è assimilabile al valore Z.

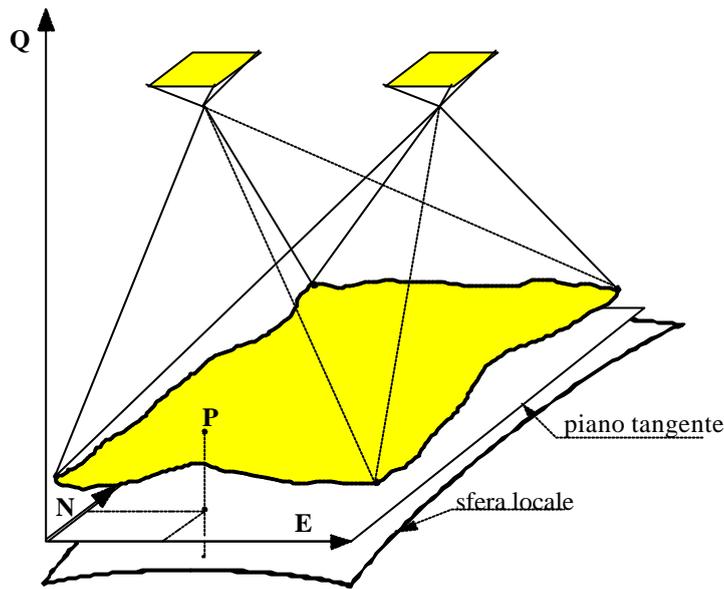


figura 20

Sembrirebbe pertanto logico assumere il sistema  $(N,E,Q)$ , come sistema di riferimento nel quale scrivere le due equazioni di collinearità.

Tale sistema, che è quello che viene adottato nella pratica operativa, dove le approssimazioni, purché ininfluenti sulle qualità del prodotto, vengono sempre accettate, o per meglio dire ignorate, non è però idoneo ad esser preso come sistema di riferimento per impostare un discorso rigoroso di geometria analitica.

Sceglieremo quindi, per scrivere l'equazione di collinearità, un ideale sistema cartesiano tridimensionale ortogonale  $(X,Y,Z)$  così definito:

- asse  $X$  parallelo alla direzione media di volo della strisciata
- piano  $(X,Y)$  coincidente con il piano tangente alla sfera locale in un punto approssimativamente baricentrico alla zona di terreno ripresa su entrambi i fotogrammi

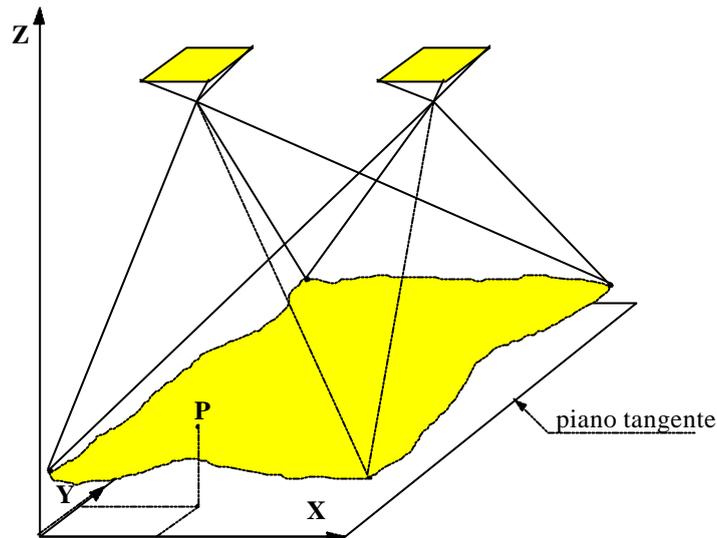


figura 21

Tale sistema  $(X, Y, Z)$  sarà dunque il sistema di riferimento rispetto al quale verrà ricavata l'equazione di collinearità.

La figura 22 riproduce in termini di geometria analitica lo schema a cui ci riferiamo per determinare le equazioni di collinearità di due raggi omologhi.

Nella figura il sistema di riferimento esterno  $(X, Y, Z)$  nel quale verranno scritte le equazioni è quello appena definito; non si è disegnata la camera da presa nelle due posizioni di presa, ma solo il suo sistema di riferimento interno  $(x, y, z)$  all'atto dei due istanti di presa; dei due fotogrammi si è riportata l'immagine positiva.

I due sistemi di riferimento sono stati disegnati con gli assi  $(x, y, z)$  non paralleli agli assi della terna  $(X, Y, Z)$ ; così pure i due punti di presa  $O_1$  e  $O_2$  non hanno valore  $Y$  e  $Z$  uguali; ciò sta a significare che durante la ripresa dei fotogrammi, tra un fotogramma ed il successivo si ha un diverso assetto angolare dell'aereo e una traiettoria non perfettamente rettilinea e a quota non costante ( per motivi di turbolenza atmosferica ed altri).

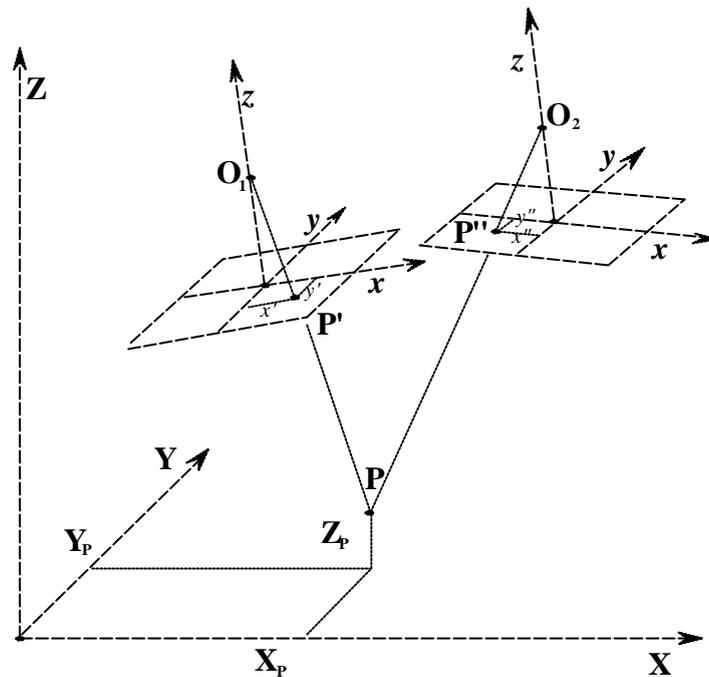


figura 22

Nelle due posizioni  $O_1$  e  $O_2$  le due terne non avranno gli assi paralleli agli  $(X, Y, Z)$ , né saranno paralleli tra di loro. Inoltre l'origine della terna del sistema di riferimento interno avrà coordinate  $X_1^0, Y_1^0, Z_1^0$  al momento della presa del fotogramma di sinistra e coordinate  $X_2^0, Y_2^0, Z_2^0$  al momento della presa del fotogramma di destra.

Si tenga presente che nella figura 22 gli assetti angolari delle due terne e le variazioni in  $Y$  e  $Z$  dei due punti di presa sono stati enfatizzati rispetto ai valori che si hanno nella realtà per esigenze di chiarezza della spiegazione.

Si noti infine che nella figura è presente un'impresione, alla quale abbiamo già fatto cenno in precedenza, e che consiste nell'aver rappresentato gli assi  $x, y$  del sistema di riferimento interno nel piano delle diapositive, anziché in un piano ad esse parallelo e passante per il punto di presa  $O$ .

Affrontiamo ora il problema di scrivere l'equazione di collinearità per il raggio omologo che si riferisce al punto immagine sul fotogramma di sinistra.

Con riferimento a quanto detto indicheremo con:

$X_1^0, Y_1^0, Z_1^0$  le coordinate del punto di presa  $O_1$  nel sistema  $(X, Y, Z)$

$X_p, Y_p, Z_p$  le coordinate di un generico punto  $P$  del terreno nel sistema  $(X, Y, Z)$

$x', y', z'$  le coordinate di  $P'$ , immagine di  $P$  sul fotogramma 1 nel sistema  $(x, y, z)$

$X', Y', Z'$  le coordinate di  $P'$  nel sistema  $(X, Y, Z)$

L'equazione di collinearità deve esprimere, come già detto, il fatto che i tre punti  $P, P'$  ed  $O_1$  siano allineati su una retta. Dobbiamo quindi scrivere l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $P, P', O_1$ .

Consideriamo la proiezione della retta  $r$  sui due piani (XZ) ed (YZ) (vedi figura 23).

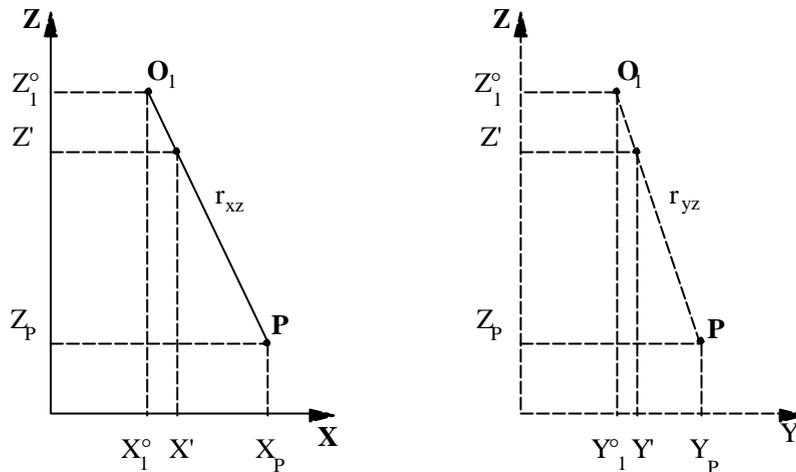


figura 23

Dalle due proiezione  $r_{XZ}$  e  $r_{YZ}$  si ricavano immediatamente le relazioni analitiche che esprimono la collinearità fra i punti  $O_1$ ,  $P'$  e  $P$ :

$$\frac{X_p - X_1^0}{Z_p - Z_1^0} = \frac{X' - X_1^0}{Z' - Z_1^0}$$

$$\frac{Y_p - Y_1^0}{Z_p - Z_1^0} = \frac{Y' - Y_1^0}{Z' - Z_1^0}$$

(3)

Per analogia possiamo ricavare immediatamente le equazioni che esprimono la collinearità per il raggio omologo relativo al punto immagine del fotogramma di destra:

$$\frac{X_p - X_2^0}{Z_p - Z_2^0} = \frac{X' - X_2^0}{Z' - Z_2^0}$$

$$\frac{Y_p - Y_2^0}{Z_p - Z_2^0} = \frac{Y' - Y_2^0}{Z' - Z_2^0}$$

Possiamo notare che nelle equazioni di collinearità che abbiamo appena ricavato, compaiono le coordinate dei punto immagine  $X', Y', Z'$  e  $X'', Y'', Z''$  nel sistema di riferimento esterno  $X, Y, Z$ ; a noi interessa invece che le coordinate dei punti immagine, nell'equazione di collinearità, siano le loro coordinate lastra, che siamo appunto in grado di misurare mediante lo strumento restitutore analitico.

Dobbiamo allora cercare di esprimere le coordinate  $X', Y', Z'$  e  $X'', Y'', Z''$  in funzione delle corrispondenti coordinate lastra  $x', y'$  e  $x'', y''$ .

#### 2.4.2 La matrice di rotazione tra il sistema $(X, Y, Z)$ e il sistema $(x, y, z)$

Chiamiamo  $[M]$  la matrice di rotazione che trasforma le coordinate lastra di un punto immagine espresse nel sistema interno  $(x,y,z)$  nel sistema esterno  $(X,Y,Z)$  precedentemente definito.

La matrice  $[M]$  avrà ovviamente la stessa espressione sia per il fotogramma di destra  $[M_1]$  che per il fotogramma di sinistra  $[M_2]$ . Noi la ricaveremo quindi in una forma generica e vedremo dopo come specificare quando essa si riferisce al fotogramma di sinistra e quando si riferisce al fotogramma di destra.

Indicando con  $X',Y',Z'$  le coordinate di un punto immagine  $P'$  della lastra nel sistema  $(X,Y,Z)$ , con  $X_1^0,Y_1^0,Z_1^0$  le coordinate del punto di presa del fotogramma di sinistra e con  $x',y',z'$  le coordinate del punto immagine  $P'$  nel sistema di riferimento interno  $(x,y,z)$ ,  $[M_1]$  dovrà soddisfare la relazione:

$$\begin{pmatrix} X' - X_1^0 \\ Y' - Y_1^0 \\ Z' - Z_1^0 \end{pmatrix} = [M_1] \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (4)$$

Mentre indicando con  $X'',Y'',Z''$  le coordinate di un punto immagine  $P''$  della lastra nel sistema  $(X,Y,Z)$ , con  $X_2^0,Y_2^0,Z_2^0$  le coordinate del punto di presa del fotogramma di destra e con  $x'',y'',z''$  le coordinate del punto immagine  $P''$  nel sistema di riferimento interno  $(x,y,z)$ ,  $[M_2]$  dovrà soddisfare la relazione:

$$\begin{pmatrix} X'' - X_2^0 \\ Y'' - Y_2^0 \\ Z'' - Z_2^0 \end{pmatrix} = [M_2] \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \quad (5)$$

La matrice  $[M]$ , scritta in funzione dei coseni direttori tra le due terne  $(X,Y,Z)$  e  $(x,y,z)$  ha la seguente espressione:

$$[M] = \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) & \cos(zX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) & \cos(zY) \\ \cos(xZ) & \cos(yZ) & \cos(zZ) \end{pmatrix}$$

I nove coseni direttori possono essere espressi in funzione di tre sole rotazioni indipendenti.

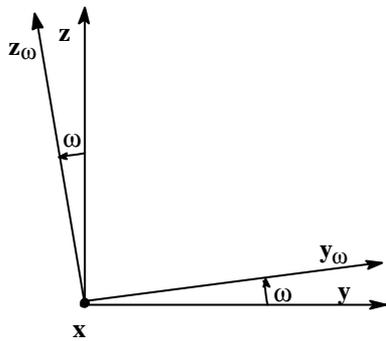
Per fissare queste tre rotazioni assumiamo che la terna  $(x,y,z)$  abbia inizialmente gli assi paralleli a quelli della terna  $(X,Y,Z)$  e imponiamo che essa assuma la sua generica posizione nello spazio  $(X,Y,Z)$  che ha al momento della presa del fotogramma, mediante le seguenti tre successive rotazioni:

- $w$ , positiva in senso antiorario, intorno all'asse  $x$
- $j$ , positiva in senso antiorario, intorno all'asse  $y$  dopo che la terna ha subito la rotazione  $\omega$
- $k$ , positiva in senso antiorario, intorno all'asse  $z$  dopo che la terna ha subito le due precedenti rotazioni.

Per ricavare  $[M]$  in funzione delle tre rotazioni  $\omega, \phi, \kappa$  si scrivono le tre matrici che esprimono le tre rotazioni della terna  $(x,y,z)$  intorno ad  $x, y$  e  $z$  e se ne esegue il prodotto:

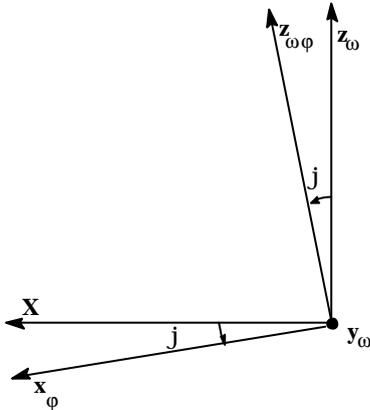
$$[M] = [M_{\omega}] \cdot [M_{\varphi}] \cdot [M_{\kappa}]$$

Rotazione primaria  $\omega$  (intorno a x)



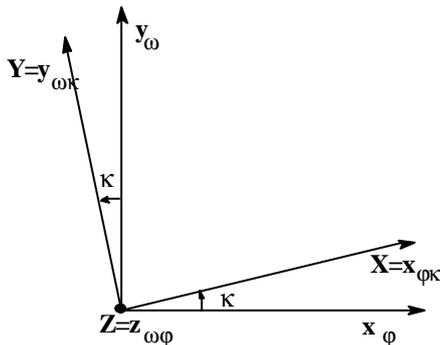
$$[M_{\omega}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{vmatrix}$$

Rotazione secondaria  $\varphi$ , (intorno a  $y_{\omega}$ , dove si è portato l'asse y a seguito della rotazione primaria  $\omega$ )



$$[M_{\varphi}] = \begin{vmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Rotazione terziaria  $\kappa$  (intorno a  $z_{\omega\varphi}$ , dove si è portato l'asse z a seguito delle due rotazioni  $\omega$  e  $\varphi$ ; l'asse  $z_{\omega\varphi}$ , avendo subito due rotazioni coincide già con Z)



$$[M_{\kappa}] = \begin{vmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Dal prodotto delle tre matrici, relative alle tre rotazioni, ricaviamo quindi la matrice  $[M]$ :

$$[M_\varphi] x [M_\kappa] = \begin{vmatrix} \cos j \cos k & -\sin k \cos j & \sin j \\ \sin k & \cos k & 0 \\ -\sin j \cos k & \sin k \sin j & \cos j \end{vmatrix}$$

$$[M] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & -\sin w \\ 0 & \sin w & \cos w \end{vmatrix} x \begin{vmatrix} \cos j \cos k & -\sin k \cos j & \sin j \\ \sin k & \cos k & 0 \\ -\sin j \cos k & \sin k \sin j & \cos j \end{vmatrix}$$

e infine:

$$[M] = \begin{vmatrix} \cos j \cos k & -\sin k \cos j & \sin j \\ \cos w \sin k + \sin w \sin j \cos k & \cos w \cos k - \sin w \sin k \sin j & -\sin w \cos j \\ \sin w \sin k - \sin j \cos w \cos k & \sin w \cos k + \cos w \sin k \sin j & \cos w \cos j \end{vmatrix} \quad (6)$$

Quando nella (6) i valori di  $\omega$   $\varphi$   $\kappa$  si riferiscono al fotogramma di sinistra li indicheremo con  $\omega_1$   $\varphi_1$   $\kappa_1$ ; quando invece saranno riferiti al fotogramma di destra li indicheremo con  $\omega_2$   $\varphi_2$   $\kappa_2$ .

Nel seguito della trattazione, quando la matrice  $[M]$  conterrà i valori  $\omega_1$   $\varphi_1$   $\kappa_1$  del fotogramma di sinistra la indicheremo con  $[M_1]$  e indicheremo i suoi elementi con  $a_{ij}$ ; quando invece la matrice  $[M]$  conterrà i valori  $\omega_2$   $\varphi_2$   $\kappa_2$  del fotogramma di destra la indicheremo con  $[M_2]$  e indicheremo i suoi elementi con  $b_{ij}$ .

$$[M_1] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad [M_2] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}$$

(7)

Sostituendo le (7) nelle (4) e nelle (5) si ottiene:

$$\begin{aligned} X' &= X_1^0 + a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' \\ Y' &= Y_1^0 + a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z' \\ Z' &= Z_1^0 + a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z' \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} X'' &= X_2^0 + b_{11} x'' + b_{12} y'' + b_{13} z'' \\ Y'' &= Y_2^0 + b_{21} x'' + b_{22} y'' + b_{23} z'' \\ Z'' &= Z_2^0 + b_{31} x'' + b_{32} y'' + b_{33} z'' \end{aligned}$$

### 2.4.3 Forma definitiva delle equazioni di collinearità per due raggi omologhi

Sostituendo le (8) nelle (3) si ottiene:

$$\frac{X_P - X_1^0}{Z_P - Z_1^0} = \frac{(X_1^0 + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z') - X_1^0}{(Z_1^0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z') - Z_1^0} \quad \frac{Y_P - Y_1^0}{Z_P - Z_1^0} = \frac{(Y_1^0 + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z') - Y_1^0}{(Z_1^0 + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z') - Z_1^0}$$

$$\frac{X_P - X_2^0}{Z_P - Z_2^0} = \frac{(X_2^0 + b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'') - X_2^0}{(Z_2^0 + b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z'') - Z_2^0} \quad \frac{Y_P - Y_2^0}{Z_P - Z_2^0} = \frac{(Y_2^0 + b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'') - Y_2^0}{(Z_2^0 + b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z'') - Z_2^0}$$

E semplificando:

$$\frac{X_P - X_1^0}{Z_P - Z_1^0} = \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'} \quad \frac{Y_P - Y_1^0}{Z_P - Z_1^0} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'} \quad (9)$$

$$\frac{X_P - X_2^0}{Z_P - Z_2^0} = \frac{b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z''}{b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''} \quad \frac{Y_P - Y_2^0}{Z_P - Z_2^0} = \frac{b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z''}{b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''}$$

Le (9) esprimono la condizione di collinearità fra un punto P del terreno e le sue due immagini P' e P'' sui fotogrammi di sinistra e di destra.

Le (9) esprime quindi il legame fra:

- le coordinate di un generico punto P nel sistema (X,Y,Z);
- i parametri che definiscono le posizioni delle terne  $O_1(x,y,z)$  e  $O_2(x,y,z)$  nel sistema (X,Y,Z); tali parametri sono le coordinate  $X_1^0, Y_1^0, Z_1^0$  e  $X_2^0, Y_2^0, Z_2^0$  delle origini delle terne  $O_1$  e  $O_2$  ed i loro valori angolari d'assetto  $(\omega_1 \varphi_1 \kappa_1)$  e  $(\omega_2 \varphi_2 \kappa_2)$  contenuti negli elementi  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  rispettivamente;
- le coordinate  $x', y'$  e  $x'', y''$  dei punti P' e P'', immagini di P sui fotogrammi 1 e 2.

### 2.5 Sulla possibilità di utilizzare in diversi modi le equazioni di collinearità.

Ora che abbiamo determinato la *relazione analitica fondamentale* sulla quale si regge tutta la fotogrammetria analitica, e cioè l'*equazione di collinearità*, potremmo procedere in vari modi per arrivare alla soluzione che ci interessa, che è quella di dare una rappresentazione cartografica del terreno, ricavando le coordinate N,E,Q dei punti del modello stereoscopico in funzione delle coordinate dei punti immagine.

Tenuto conto tuttavia della necessità di contenere l'argomento entro i limiti imposti dalle esigenze del corso, prenderemo in considerazione solo la *soluzione classica*, che ancor oggi viene in genere seguita da tutte le Ditte fotogrammetriche che producono cartografia con strumenti analitici.

Questa soluzione è tradotta nella realtà operativa da un *programma*, che risiede sul PC che fa parte del restitutore, e che guida l'operatore ad eseguire le varie fasi del lavoro.

Abbiamo infatti precedentemente visto che l'operatore, dopo aver appoggiato sui due carrelli portalastre le due diapositive che formano un modello stereoscopico, lancia dalla tastiera del PC il *programma di orientamento interno* e seguendo i comandi che appaiono sul monitor esegue le varie operazioni da esso previste.

La soluzione classica prevede che, dopo che l'orientamento interno è terminato, l'operatore lanci una seconda procedura, che si compone di due parti: *l'orientamento relativo* e *l'orientamento assoluto*.

L'operazione di orientamento relativo ha lo scopo di determinare la posizione *reciproca* che i due fotogrammi avevano al momento della presa, senza prendersi cura di determinare quale fosse la posizione dei fotogrammi rispetto al sistema di riferimento assoluto N,E,Q.

Vedremo che sarà sufficiente conoscere la posizione reciproca dei due fotogrammi in un sistema arbitrario per *calcolare i punti di intersezione dei raggi omologhi*, il che equivale a dire *a formare il modello stereoscopico del terreno*.

Successivamente, dopo aver creato il modello del terreno con l'orientamento relativo, con *l'orientamento assoluto* lo si metterà in scala, lo si ruoterà e lo si traslerà in modo che le coordinate dei punti di intersezione dei raggi omologhi, calcolate nel sistema di riferimento arbitrario, si trasformino in coordinate terreno N,E,Q.

## 2.6 *L'orientamento relativo di due fotogrammi.*

### 2.6.1 *Il concetto generale*

Richiamiamo il concetto di base dell'orientamento relativo: eseguire l'orientamento relativo di due fotogrammi significa saperne determinare, in un sistema di riferimento arbitrario, la posizione che uno aveva rispetto all'altro al momento della presa.

Poiché al momento della presa le due immagini  $P'$  e  $P''$  di un punto  $P$  si originano da uno stesso punto  $P$  del terreno, se noi rimettiamo (analiticamente) i due fotogrammi nella stessa posizione reciproca che essi avevano al momento della presa, *anche se essi hanno nell'insieme una posizione qualsiasi nello spazio*, i due raggi omologhi che proiettano (analiticamente)  $P'$  e  $P''$  dai punti di presa  $O_1$  e da  $O_2$  rispettivamente, si incontreranno nuovamente in un punto che corrisponde a  $P$ .

Noi non sappiamo quale fosse l'assetto dei due fotogrammi nel loro insieme rispetto al sistema assoluto al momento della presa (e, come si è detto, in questo momento non ci importa di saperlo) e quindi, li posizioneremo l'uno rispetto all'altro nella stessa posizione reciproca che avevano al momento della presa, ma, nel loro insieme, *in una posizione qualsiasi nello spazio*; il che significa che la terna di riferimento  $(X,Y,Z)$  che sceglieremo per esprimere i parametri che ne determinano la posizione reciproca dell'uno rispetto all'altro sarà una terna arbitraria.

Di conseguenza, una volta determinati i parametri dell'orientamento relativo, le coordinate di  $P$  (e di ogni altro punto del modello stereoscopico) le ricaveremo in questa terna arbitraria; in un secondo tempo, come già detto, le trasformeremo in N,E,Q con l'operazione di *orientamento assoluto*.

### 2.6.2 Scelta del sistema di riferimento arbitrario

Per comprendere quale sia il sistema di riferimento arbitrario  $(X,Y,Z)$  nel quale determineremo i parametri di orientamento relativo dei due fotogrammi, consideriamo come abbiamo costruito il disegno riportato in figura 24:

- in un punto arbitrario dello spazio posizioniamo l'origine  $O$  del sistema di riferimento arbitrario  $(X,Y,Z)$ ;
- facciamo coincidere con  $O$  l'origine  $O_1$  della terna del sistema interno di riferimento  $(x,y,z)$  nella posizione di presa del fotogramma di sinistra, indicandone gli assi con  $x',y',z'$ ; abbiamo scelto il piano del disegno in modo che esso contenga l'asse  $z'$ ; gli altri due assi  $x'$  e  $y'$ , in generale, non giaceranno nel piano del disegno;
- scegliamo l'asse  $X$  del nostro sistema di riferimento arbitrario in modo che passi per il secondo punto di presa  $O_2$  e disegniamolo nel piano del disegno; il punto di presa  $O_2$  si troverà dunque sull'asse  $X$  ed avrà un valore di ascissa  $X_2^0$  pari alla base di presa  $b$ ; tale valore è in realtà incognito, ma noi lo supponiamo per il momento noto; vedremo che esso verrà determinato nella fase di orientamento assoluto;
- disegniamo quindi, con la notazione  $x'',y'',z''$ , la terna di riferimento interna  $(x,y,z)$  con l'origine in  $O_2$ , e supponiamo che essa abbia, rispetto alla terna  $x',y',z'$ , la stessa posizione angolare che essa aveva al momento della presa; questo significa che il disegno rappresenta i due fotogrammi correttamente orientati in senso relativo l'uno rispetto all'altro;
- disegniamo poi due generici raggi omologhi, che proiettano due punti omologhi  $P'$  e  $P''$ ; poiché abbiamo supposto che le due terne siano correttamente orientate l'una rispetto all'altra come al momento della presa, i due raggi omologhi si incontrano in un punto  $P$  che è l'equivalente del punto terreno che ha generato i punti omologhi  $P'$  e  $P''$ ;
- nel disegno abbiamo quindi evidenziato con linea a trattini le proiezioni dei due raggi omologhi nei piani  $(X,Z)$  e  $(Y,Z)$ ;
- i due raggi omologhi nel piano  $(X,Z)$  escono dai punti  $O_1$  e  $O_2$  che giacciono nel piano  $(X,Z)$  si incontrano nel punto di ascissa  $X^*$  e di ordinata  $Z^*$ ;
- i due raggi omologhi nel piano  $(Y,Z)$  risulteranno invece sovrapposti, poiché devono entrambi passare per il punto di coordinate  $Y^*,Z^*$  e per le proiezioni di  $O_1$  e  $O_2$  sul piano  $(Y,Z)$ , proiezioni che coincidono entrambe con l'origine  $O$  della terna  $(X,Y,Z)$ .

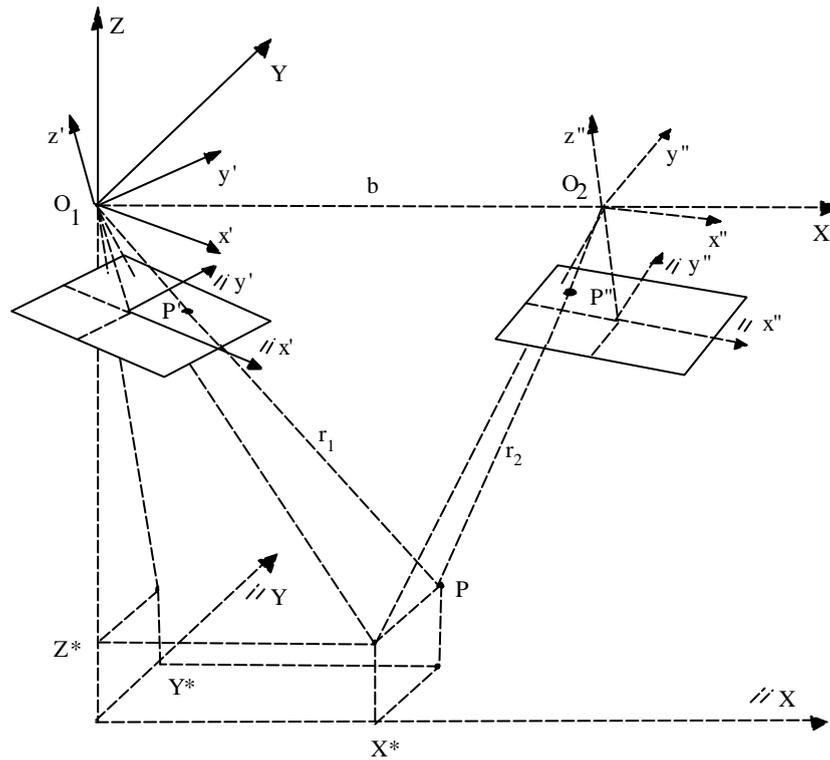


figura 24

### 2.6.3 L'equazione di condizione per l'orientamento relativo

Riprendiamo ora le equazioni di collinearità e per semplicità di notazione poniamo:

$$T_{x_1} = \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z'}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'} \quad T_{x_2} = \frac{b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z''}{b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''}$$

$$T_{y_1} = \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z'}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'} \quad T_{y_2} = \frac{b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z''}{b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z''}$$

Le equazioni dei raggi omologhi risultano rispettivamente:

$$\frac{X_P - X_1^0}{Z_P - Z_1^0} - T_{x_1} = 0 \quad \frac{X_P - X_2^0}{Z_P - Z_2^0} - T_{x_2} = 0$$

$$\frac{Y_P - Y_1^0}{Z_P - Z_1^0} - T_{y_1} = 0 \quad \frac{Y_P - Y_2^0}{Z_P - Z_2^0} - T_{y_2} = 0$$

Supponiamo ora di scrivere le equazioni assumendo come riferimento la terna (X,Y,Z) che abbiamo definito al punto 2.6.2 precedente; nelle (11) possiamo porre:

$$X_1^0 = Y_1^0 = Z_1^0 = 0$$

$$Y_2^0 = Z_2^0 = 0$$

$$X_2^0 \neq 0$$

Inoltre sostituiamo  $X^*, Y^*, Z^*$  alle generiche coordinate del punto P.

Le equazioni di collinearità assumono allora la seguente espressione:

$$\frac{X^*}{Z^*} = T_{x_1} \qquad \frac{Y^*}{Z^*} = T_{y_1}$$

(12)

$$\frac{X^* - X_2^0}{Z^*} = T_{x_2} \qquad \frac{Y^*}{Z^*} = T_{y_2}$$

(13)

Come già si evince dalla figura precedente, nelle (12) i primi termini dell'uguaglianza, e cioè i rapporti  $\frac{Y^*}{Z^*}$  sono uguali e quindi devono essere uguali anche i rispettivi secondi termini delle due uguaglianze, e cioè:  $T_{y_2}=T_{y_1}$ ; da cui si ricava:

$$T_{y_2}-T_{y_1}=0 \qquad (14)$$

che è l'equazione che deve essere soddisfatta *per ogni coppia di punti omologhi* quando i due fotogrammi sono correttamente orientati relativamente.

Riscriviamo la relazione (14) esplicitando le coordinate lastra dei punti omologhi e gli elementi  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  delle due matrici di orientamento:

$$\frac{b_{21}x''+b_{22}y''+b_{23}z''}{b_{31}x''+b_{32}y''+b_{33}z''} - \frac{a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23}z'}{a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33}z'} = 0 \qquad (15)$$

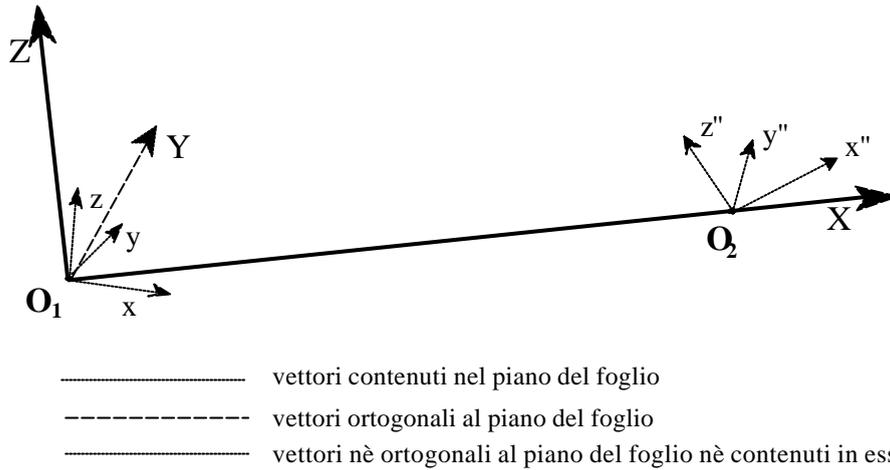
dove i termini della matrice  $[M_1] = [a_{i,j}]$  sono funzione dei valori di assetto angolare  $\kappa_1, \phi_1, \omega_1$  del sistema  $O_1(x,y,z)$  rispetto al sistema  $(X,Y,Z)$  ed i termini della matrice  $[M_2] = [b_{i,j}]$  sono funzione dei valori d'assetto angolare  $\kappa_2, \phi_2, \omega_2$  del sistema  $O_2(x,y,z)$  sempre rispetto al sistema arbitrario  $(X,Y,Z)$ .

Determinare i parametri dell'orientamento angolare dei due fotogrammi significa determinare i valori angolari  $\omega_1, \phi_1, \kappa_1$ , e  $\omega_2, \phi_2, \kappa_2$ , che sono contenuti negli elemento  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ .

Per far questo bisogna scrivere un sufficiente numero di equazioni di tipo 14, misurando sufficiente numero di coordinate  $x',y'$  e  $x'',y''$  di coppie di punti omologhi e risolverle rispetto alle incognite  $\omega_1, \phi_1, \kappa_1$ , e  $\omega_2, \phi_2, \kappa_2$ .

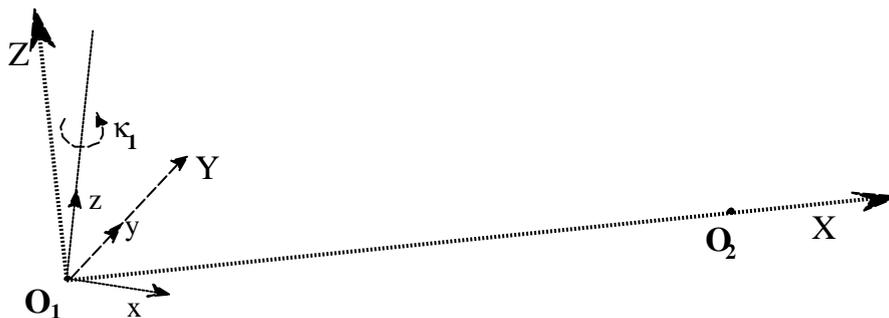
Da quanto detto sembrerebbe che i parametri dell'orientamento relativo fossero 6, cioè appunto i sei valori angolari  $\omega_1, \phi_1, \kappa_1$ , e  $\omega_2, \phi_2, \kappa_2$ . Invece vediamo subito che essi *sono solo 5*. E questo è un conseguenza del fatto di aver scelto l'asse X della terna di riferimento  $(X,Y,Z)$  complanare all'asse z' della terna di riferimento interna nella posizione  $O_1$ ; scelta di cui non si era finora data ragione.

Ricordiamoci infatti che quando abbiamo definito la matrice di rotazione  $[M_1]$  tra il sistema interno  $(x,y,z)$  e quello  $(X,Y,Z)$  avevamo fissato i tre angoli  $\omega_1, \phi_1, \kappa_1$ , come primario, secondario e terziario, assumendo che la terna  $(x,y,z)$  avesse originariamente gli assi paralleli alla terna  $(X,Y,Z)$  e che le tre rotazioni, applicate in successione, la portassero nella posizione generica.

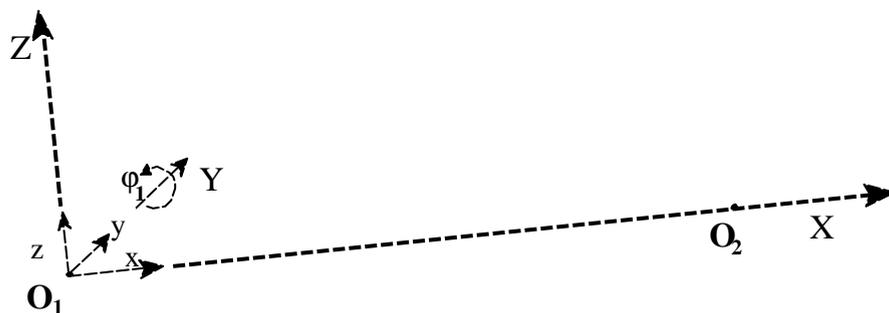


Facciamo ora il ragionamento inverso e cioè riportiamo la terna (x,y,z) dalla posizione generica ad avere gli assi paralleli alla terna (X,Y,Z). Dovremo allora applicare all'inverso la sequenza di rotazioni  $\kappa_1, \phi_1, \omega_1$ ; procediamo come segue:

- consideriamo la terna (x,y,z) nella posizione  $O_1$  cioè riferita al primo fotogramma;
- diamo una rotazione  $\kappa_1$  alla terna (x,y,z) intorno all'asse z fino a portare il suo asse x nel piano del disegno e quindi a giacere nel piano (X,Y) della terna (X,Y,Z);



- a questo punto sia il piano (x,z) che il piano (X,Z) giacciono nel piano del foglio, e quindi gli assi y e Y saranno entrambi ortogonali al piano del foglio e quindi coincidenti;
- diamo adesso la rotazione  $\phi_1$  intorno all'asse y fino a portare l'asse z coincidente con Z e conseguentemente x coincidente con X;



- a questo punto le due terne coincidono senza che ci sia bisogno di dare alcuna rotazione  $\omega_1$ ; cioè, assumendo come sistema di riferimento per determinare i parametri dell'orientamento relativo quello sopra descritto, possiamo porre sempre nelle (14)  $w_1=0$  e quindi le incognite dell'orientamento relativo sono in effetti solo le seguenti 5:

$$k_1, j_1, k_2, j_2, w_2$$

Per realizzare l'orientamento relativo sarebbe pertanto sufficiente, in teoria, scrivere l'equazione (15) cinque volte, considerando 5 coppie di raggi omologhi proiettanti 5 coppie di punti omologhi sulle due lastre.

In realtà quando l'operatore deve eseguire l'operazione di orientamento relativo non si accontenta di collimare 5 coppie di punti omologhi, ma ne collima molte di più, almeno 12. Questo è dovuto a due fatti. Uno è comune ad ogni problema di determinazione di incognite per mezzo di operazioni di misura, e, come abbiamo visto nella trattazione delle osservazioni indirette, riguarda l'esigenza di ridurre l'influenza degli errori di misura sulla determinazione delle incognite.

Ma in questo caso specifico vi è un'altra esigenza, che è quella di mediare, sulla determinazione delle incognite, gli effetti dovuti a eventuali residui di deformazione della pellicola, non corretti in fase di orientamento interno, in quanto non correggibili dalla trasformazione affine ivi applicata.

Scegliendo quindi un numero sovrabbondante di punti omologhi, opportunamente distribuiti nel modello, si ha una migliore determinazione delle incognite.

Dobbiamo infatti ragionare in questo modo: per quanto accuratamente si esegua l'operazione, dopo l'orientamento relativo non si avrà comunque mai una *perfetta* intersezione dei raggi omologhi per le  $n$  coppie di punti omologhi osservate; il che, matematicamente parlando, significa che la quintupletta di valori determinati  $k_1, j_1, k_2, j_2, w_2$  non sarà in grado di annullare tutte le  $n$  equazioni in base alle quali sono stati determinati (*metodo delle osservazioni indirette docet!*). E' vero però che, utilizzando appunto un numero sovrabbondante di coppie di punti omologhi per determinare i parametri incogniti, la distanza tra due generici raggi omologhi, in corrispondenza del loro punto ideale di intersezione, sarà ridotta mediamente a una quantità molto piccola, cioè dell'ordine dell'errore di misura delle coordinate lastra dei punti omologhi, cioè di pochi micron.

Dobbiamo infine notare a questo proposito, che aumentare il numero  $n$  di coppie di punti omologhi per migliorare l'orientamento relativo, e cioè eseguire l'orientamento relativo con 12 o con 20 coppie di punti, anziché le 5 strettamente necessarie, è irrilevante sul piano economico. Ciò infatti comporta unicamente che l'operatore impieghi 4 o 5 minuti di tempo in più per scegliere nel modello un po' di coppie ben collimabili e che le collimi; il tempo di calcolo poi, stante l'apposito programma di calcolo sul PC, è trascurabile.

Questo è il motivo fondamentale (cioè quello economico) per cui nella prassi ordinaria, per ricavare le coordinate  $N, E, Q$  dalle  $x', y'$  e  $x'', y''$ , si è spezzato il procedimento in due parti:

- l'orientamento relativo, in cui è opportuno usare tanti punti per formare bene il modello stereoscopico e questo può essere fatto perché intanto i punti in più costano poco
- l'orientamento assoluto, in cui invece i punti che occorrono costano molto (o almeno una volta era così, ora, anno 1996, un po' meno) ma possono essere contenuti nel numero.

#### 2.6.4 Calcolo delle coordinate dei punti del modello nel sistema arbitrario

Dopo aver completato la fase di collimazione dei punti omologhi, l'operatore lo segnala al PC tramite tastiera, e il software procede allora a calcolare i parametri di orientamento di relativo  $\phi_1, \kappa_1, \omega_2, \phi_2, \kappa_2$ , col metodo delle osservazioni indirette.

Da questo punto in poi ogni volta che l'operatore collimerà sui due fotogrammi le due immagini  $P_i'$  e  $P_i''$  di un punto  $P_i$ , la procedura residente sul PC eseguirà automaticamente le seguenti operazioni:

- le due coppie di coordinate strumentali  $(U_i, V_i)_1$  e  $(U_i, V_i)_2$  vengono trasformate in  $(x'_i, y'_i)_1$  e  $(x''_i, y''_i)_2$  dalla routine dell'orientamento interno;
- dalle due coppie di coordinate  $(x'_i, y'_i)$  e  $(x''_i, y''_i)$  si passa alle coordinate  $(X_i, Y_i, Z_i)$  nel sistema di riferimento arbitrario mediante la routine di orientamento relativo.

I calcoli di cui ai due punti precedenti avvengono naturalmente in una frazione di secondo; e cioè in minor tempo di quello che l'operatore impiega a passare da un punto collimato al successivo.

Il calcolo delle coordinate di ogni coppia di punti omologhi nello spazio arbitrario  $(X, Y, Z)$  viene eseguito con le formule che seguono.

Riesaminiamo l'espressione semplificata delle equazioni di collinearità (13)

$$\frac{X^*}{Z^*} = T_{x_1} \quad \frac{Y^*}{Z^*} = T_{y_1} \quad \text{equazione del raggio omologo } r_1 \quad (13.a)$$

$$\frac{X^* - X_2^0}{Z^*} = T_{x_2} \quad \frac{Y^*}{Z^*} = T_{y_2} \quad \text{equazione del raggio omologo } r_2 \quad (13.b)$$

Dalla prima delle prime due si ricava  $X^* = T_{x_1} Z^*$  (16.a)

Dalla prima delle altre due si ricava  $Z^* = \frac{X^* - X_2^0}{T_{x_2}}$  (16.b)

Sostituendo nella 16.a il valore di  $Z^*$  ricavato nella 16.b, si ottiene

$$X^* = T_{x_1} \frac{X^* - X_2^0}{T_{x_2}} \quad \text{da cui}$$

$$X^* - X^* \frac{T_{x_1}}{T_{x_2}} = -X_2^0 \frac{T_{x_1}}{T_{x_2}} \quad \text{da cui} \quad X^* \left( 1 - \frac{T_{x_1}}{T_{x_2}} \right) = -X_2^0 \frac{T_{x_1}}{T_{x_2}}$$

$$X^* \left( \frac{T_{x_2} - T_{x_1}}{T_{x_2}} \right) = -X_2^0 \frac{T_{x_1}}{T_{x_2}} \quad \text{da cui} \quad X^* = -X_2^0 \frac{T_{x_1}}{T_{x_2} - T_{x_1}}$$

Sostituendo  $X^*$  nella (16.b) si ricava  $Z^*$

$$Z^* = \frac{-X_2^0 \frac{T_{x_1}}{T_{x_2} - T_{x_1}} - X_2^0}{T_{x_2}} = \frac{-X_2^0 T_{x_1} \left( \frac{1}{T_{x_2} - T_{x_1}} + \frac{1}{T_{x_1}} \right)}{T_{x_2}} = -\frac{X_2^0}{T_{x_2}} \left( \frac{T_{x_1} + T_{x_2} - T_{x_1}}{(T_{x_2} - T_{x_1}) T_{x_1}} \right) = -\frac{X_2^0}{(T_{x_2} - T_{x_1})}$$

Per ricavare  $Y^*$  si può usare la seconda equazione delle 13.a o della 13.b ; ne calcoliamo quindi il valore definitivo come media dei due valori possibili:

$$Y^* = \frac{Z^* T_{y_1} + Z^* T_{y_2}}{2} = Z^* \frac{T_{y_1} + T_{y_2}}{2} = \frac{X_2^0}{2} \frac{(T_{y_1} + T_{y_2})}{(T_{x_1} - T_{x_2})}$$

Come già detto prima a  $X_2^0$  possiamo dare un qualsiasi valore arbitrario, ad esempio 1m

Il fatto di dare un valore arbitrario ad  $X_2^0$  si traduce nel fatto di costruire, con l'orientamento relativo, non solo un modello riferito ad un sistema di riferimento arbitrario, ma anche in un

*rapporto di scala arbitrario*; ciò non ci deve preoccupare, poiché anche il fattore di scala verrà messo a posto nella fase di orientamento assoluto.

Dopo aver eseguito l'orientamento relativo, prima di passare alla fase di orientamento assoluto, l'operatore collima i punti che gli serviranno per l'orientamento assoluto del modello. L'operatore ha infatti davanti a sé una copia a stampa su carta di uno dei due fotogrammi che formano la coppia stereoscopica e su questa stampa vi sono segnati i punti che dovranno essere utilizzati nell'orientamento assoluto; di essi ne ripareremo tra poco. Per ora ci basti sapere che l'operatore li collima e quindi, come già detto, la procedura ne calcola le coordinate nel sistema (X,Y,Z) e le memorizza per utilizzarle nella fase di orientamento assoluto.

## 2.7 L'orientamento assoluto del modello stereoscopico

L'orientamento assoluto è quell'operazione mediante la quale il modello stereoscopico, viene portato ad una scala fissata ed orientato in un sistema di riferimento assoluto.

Come abbiamo visto al punto 1 del capitolo V il sistema di riferimento assoluto al quale si deve ricondurre il modello stereoscopico, è definito in planimetria dal sistema cartografico Gauss-Boaga ed in altimetria dal geoide.

Immaginiamo di vedere la porzione di terreno relativa al modello stereoscopico inserita nel sistema di riferimento assoluto (vedi figura 25) ne abbiamo tracciato il perimetro con linea a tratti per indicare che in realtà la sua rappresentazione non l'abbiamo e la dobbiamo ottenere in funzione del modello stereoscopico ottenuto dai fotogrammi.

Nello stesso disegno appare anche il modello stereoscopico nel suo sistema di riferimento arbitrario e in una scala arbitraria; nel disegno questi due concetti sono rappresentati dal fatto che il modello stereoscopico, più piccolo rispetto alle dimensioni reali del terreno e vincolato al sistema arbitrario (X,Y,Z) *svolazza* in un punto generico del sistema di riferimento assoluto.

Abbiamo inoltre evidenziato nel disegno 5 punti del terreno, detti **punti di appoggio** del modello stereoscopico, che hanno coordinate note N,E,Q; per ore supponiamo che tali coordinate siano state determinate con un rilievo topografico a terra a partire dai vertici trigonometrici e dai caposalda di livellazione. I punti di appoggio sono quelli che vengono utilizzati per eseguire l'orientamento assoluto e dei quali, come si è detto al paragrafo precedente, l'operatore ha determinato le coordinate nel sistema arbitrario (X,Y,Z).

Eeguire *l'orientamento assoluto* significa dare un fattore di scala L al modello stereoscopico, dargli tre rotazioni W,F,K e tre traslazioni N<sub>0</sub>, E<sub>0</sub>, Q<sub>0</sub> in modo che i cinque punti che appartengono ad esso e corrispondono ai 5 punti di orientamento assoluto, vadano a coincidere con i corrispondenti cinque punti di coordinate note nel sistema assoluto.

Per determinare i parametri dell'orientamento assoluto è sufficiente scrivere le formule di rototraslazione e di messa in scala, che sono le seguenti:

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \Lambda(X\cos(XE) + Y\cos(YE) + Z\cos(ZE)) \\ N &= N_0 + \Lambda(X\cos(XN) + Y\cos(YN) + Z\cos(ZN)) \\ Q &= Q_0 + \Lambda(X\cos(XQ) + Y\cos(YQ) + Z\cos(ZQ)) \end{aligned} \quad (16)$$

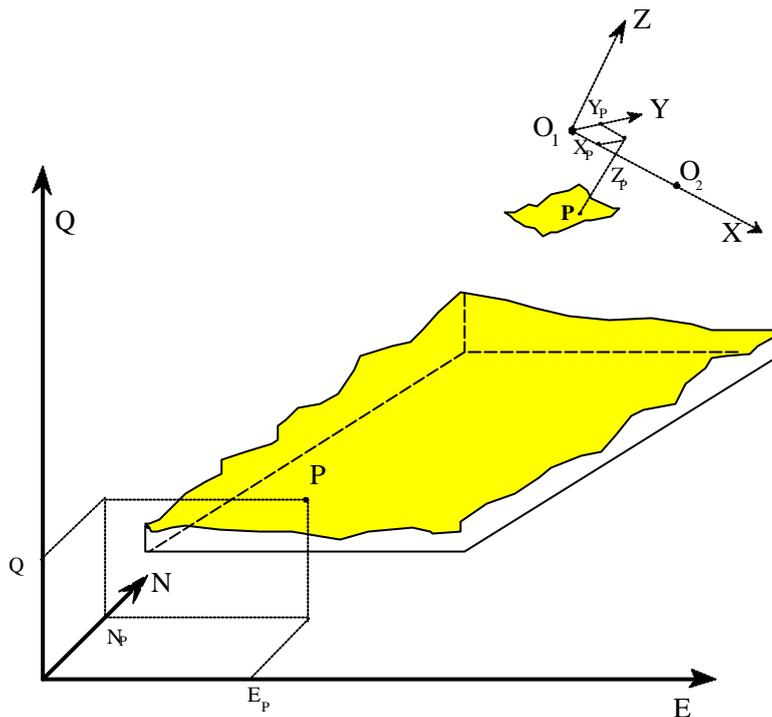


figura 25

Per ognuno dei cinque punti di appoggio si potranno scrivere le tre equazioni precedenti, ottenendo così un sistema di quindici equazioni nelle sette incognite  $N_0$ ,  $E_0$ ,  $Q_0$ ,  $K$ ,  $\Phi$ ,  $\Omega$  e  $\Lambda$ , la cui determinazione viene eseguita dal software del sistema applicando il solito algoritmo delle osservazioni indirette.

In realtà per eseguire l'orientamento assoluto sarebbe sufficiente conoscere le coordinate  $N, E, Q$  di due punti di appoggio e la quota  $Q$  di un terzo.

Infatti il modello stereoscopico può essere visto come un corpo rigido nello spazio del quale dobbiamo vincolare sei gradi di libertà (tre traslazioni e tre rotazioni indipendenti) e a cui dobbiamo attribuire un fattore di scala. Pertanto:

- conoscendo le coordinate  $(N, E, Q)$  di due punti e le relative coordinate nel sistema arbitrario  $(X, Y, Z)$  è possibile calcolare la distanza  $d$  tra i due punti nel sistema  $(X, Y, Z)$  e la distanza  $D$  nel sistema  $(N, E, Q)$ ; il rapporto  $\Lambda = \frac{D}{d}$  (coefficiente di scala) rappresenta il coefficiente di cui deve essere variata la dimensione del modello, affinché esso venga rappresentato nel sistema  $(N, E, Q)$ ;
- imponendo che i due punti modello in esame assumano le corrispondenti coordinate  $(N, E, Q)$  vengono vincolate le tre traslazioni del corpo rigido (cioè del modello) nonché due rotazioni; l'ultima libertà del corpo rigido è costituita dalla possibile rotazione intorno alla congiungente i punti scelti;
- tale rotazione viene bloccata imponendo che un terzo punto, non allineato con i precedenti, abbia una quota fissata  $Q$ .

La scelta di utilizzare 5 punti di appoggio invece dei tre strettamente necessari è dovuta, come già abbiamo detto, all'esigenza di ridurre l'influenza degli errori di misura sulla determinazione dei parametri di orientamento assoluto. Tali errori sono sia quelli dovuti alle precedenti misure

eseguite allo strumento, sia all'errore con cui sono state determinate le coordinate N,E,Q dei punti di appoggio.

E' importante osservare che in questa fase si è molto più parchi, rispetto alla fase dell'orientamento relativo, nell'aumentare il numero dei punti esuberanti, perché in questa fase aumentare il numero dei punti non vuol dire semplicemente aumentare le collimazioni allo strumento, che non sarebbe niente, ma *aumentare le operazioni di misura topografiche a terra per determinare più punti!!!* Operazioni molto costose! Per valutare correttamente questo fatto si pensi che, prima dell'avvento della triangolazione aerea (operazione che è entrata nella prassi operativa delle Ditte verso la fine degli anni '80 e di cui parleremo nel seguito e che serve appunto a determinare con metodo fotogrammetrico e non topografico i punti di appoggio dei modelli stereoscopici) il solo lavoro topografico per determinare i punti di appoggio era pari al 25% del costo totale di un rilievo cartografico fotogrammetrico!

Questo spiega quindi perché l'impostazione originariamente data dai fotogrammetri è stata quella di tenere separata l'operazione di orientamento relativo da quella dell'orientamento assoluto; nell'orientamento relativo, che è una fase molto delicata, perché è quella in cui si ricostruisce la *forma* del terreno, si può operare con grande sovrabbondanza di punti, poiché non occorre conoscerne le coordinate assolute, ma basta collimarli allo strumento; una volta formato il modello, nella fase di orientamento assoluto, in cui bisogna preventivamente determinare le coordinate N,E,Q dei punti di appoggio, si può operare con un numero meno consistente di punti esuberanti.

In nota sono riportate le funzioni che realizzano gli orientamenti interno, relativo ed assoluto, secondo le notazioni esposte nella trattazione teorica del metodo delle Osservazioni Indirette \*

---

**Applicazione dell'algorithmo delle Osservazioni Indirette.**

*Orientamento interno:*

$$x_i - x_0 + (U_i \cos\alpha + V_i \sin\alpha)\lambda = v_{1i} \quad f_{1i}(x_0^*, \alpha^*, \lambda^*; U_i, V_i) = v_{1i}$$

$$y_i - y_0 + (U_i \sin\alpha + V_i \cos\alpha)\lambda = v_{2i} \quad f_{2i}(y_0^*, \alpha^*, \lambda^*; U_i, V_i) = v_{2i}$$

le equazioni generatrici sono 2, le incognite sono 4 ( $x_0^*, y_0^*, \alpha^*, \lambda^*$ ); i deve essere > di 2.

*Orientamento relativo:*

Assumendo le semplificazioni introdotte nella definizione dell'equazione della parallasse

$$\frac{k_2 x_i'' - y_i'' + w_2 z_i''}{-j_2 x_i'' + w_2 y_i'' + z_i''} - \frac{k_1 x_i' + y_i'}{-j_1 x_i' + z_i'} = v_i$$

$$f_i(k_1^*, \phi_1^*, \kappa_2^*, \phi_2^*, \omega_2^*; x_i', y_i', z_i', x_i'', y_i'', z_i'') = v_{1i}$$

l'equazione generatrice è una, le incognite sono 5  $\kappa_1^*, \phi_1^*, \kappa_2^*, \phi_2^*, \omega_2^*$ . i deve essere > di 5.

*Orientamento assoluto:*

$$E = E_0 + \Lambda (X \cos(XE) + Y \cos(YE) + Z \cos(ZE))$$

$$N = N_0 + \Lambda (X \cos(XN) + Y \cos(YN) + Z \cos(ZN))$$

$$Q = Q_0 + \Lambda (X \cos(XQ) + Y \cos(YQ) + Z \cos(ZQ))$$

ricordando che ai 9 coseni direttori corrispondono 3 sole rotazioni indipendenti, che chiamiamo  $\Phi, \Omega, K$  risulta:

$$f_{1i}(E_0^*, \Lambda^*, \Phi^*, \Omega^*, K^*; X_i, Y_i, Z_i) = v_{1i}$$

$$f_{2i}(N_0^*, \Lambda^*, \Phi^*, \Omega^*, K^*; X_i, Y_i, Z_i) = v_{2i}$$

$$f_{3i}(Q_0^*, \Lambda^*, \Phi^*, \Omega^*, K^*; X_i, Y_i, Z_i) = v_{3i}$$

le equazioni generatrici sono 3, le incognite sono 7 ( $E_0^*, N_0^*, Q_0^*, \Lambda^*, \Phi^*, \Omega^*, K^*$ ); i deve essere > di 3.

## 2.8 *La determinazione dei punti di appoggio con metodo topografico*

Nel trattare l'argomento dell'orientamento assoluto abbiamo visto che occorrono mediamente 5 punti di appoggio (cioè di coordinate N,E,Q note) per poter orientare il modello stereoscopico, e abbiamo anche detto che provvedere alla determinazione delle coordinate di questi punti incide non poco nell'economia generale del rilievo fotogrammetrico.

Distratti dalle formule che abbiamo via via sciorinato nel corso del Capitolo, non dobbiamo infatti pensare che un rilievo fotogrammetrico si componga di due fotogrammi, ma come abbiamo visto al punto 1.3.5 di questo steso Capitolo e come vedremo al successivo punto 3, una copertura fotografica per un rilievo può essere composta da centinaia di fotogrammi e quindi da centinaia di modelli stereoscopici.

Non dobbiamo però pensare che se  $n$  sono i modelli stereoscopici i punti di appoggio da determinare siano  $n \times 5$ . Il numero effettivo dei punti di appoggio, pur elevato, sarà però molto inferiore a questo valore teorico. Infatti poiché i modelli stereoscopici si ricoprono tra di loro in senso longitudinale alla direzione di volo di circa il 10% e le strisciate si ricoprono, trasversalmente alla direzione di volo, del 10-20%, scegliendo opportunamente buona parte dei punti di appoggio in queste zone di ricoprimento si ha una notevole riduzione dei punti di appoggio rispetto al valore teorico. Tanto per dare un'idea possiamo dire che i punti di appoggio siano  $n \times 3$  anziché  $n \times 5$  (ricordiamo che entrambi questi valori sono orientativi).

Resta il fatto che un rilievo cartografico di una città di medie dimensioni richiede centinaia di punti di appoggio.

Prima dell'avvento della tecnica della triangolazione aerea, che descriveremo tra poco, il rilievo topografico dei punti di appoggio consisteva in una serie di fasi di lavoro molto simili a quelle che, nel rilievo topografico classico (vedi capitolo V), precedono il rilievo di dettaglio; e cioè, una volta eseguito il volo ed essendo disponibili le fotografie aeree, si sceglievano su di esse i punti di appoggio e quindi si partiva per le operazioni topografiche in campagna che si svolgevano come segue:

- mediante triangolazione topografica tecnica si creava una rete di inquadramento del rilievo appoggiata ai vertici trigonometrici esistenti nella zona del rilievo;
- tale rete veniva ulteriormente infittita mediante operazioni di intersezioni multiple in avanti ed inverse;
- analogamente a partire dai caposaldi di livellazione si creava una rete di inquadramento e di infittimento altimetrica;
- mediante poligoni, appoggiate ai punti delle reti di inquadramento e di infittimento planimetriche ed altimetriche, si determinavano le coordinate dei punti d'appoggio necessari per l'orientamento assoluto di ciascun modello.

Possiamo dire che questo metodo, completamente topografico, per la determinazione delle coordinate dei punti di appoggio, ormai è usato molto raramente, poiché tutte le Ditte fotogrammetriche ricorrono alla triangolazione aerea (che è descritta al successivo punto 2.11).

## 2.9 La fase di restituzione

Riprenderemo al successivo punto 3 l'argomento della restituzione fotogrammetrica; solo per concludere la trattazione matematica del problema, sarà sufficiente dire per ora che:

- una volta eseguita la procedura dell'orientamento assoluto per il modello stereoscopico, il programma memorizza i parametri di orientamento  $N_0, E_0, Q_0, K, \Phi, \Omega$  e  $\Lambda$  che sono appunto stati determinati in questa fase;
- ogni volta che l'operatore collima un punto sul modello stereoscopico la catena di calcoli descritta al punto 2.6.4 si allunga di un passo, e cioè:
- le coordinate  $X_i, Y_i, Z_i$  nel sistema arbitrario del generico punto  $P_i$  di cui si sono collimati i punti omologhi sui fotogrammi, vengono trasformate mediante le 2.5.(1) in coordinate assolute  $N_i, E_i, Q_i$ .

Dopo l'orientamento assoluto inizia quindi la fase vera e propria della *restituzione fotogrammetrica*, durante la quale l'operatore interpreta il modello del terreno che osserva stereoscopicamente nel restitutore, scegliendo quali punti restituire, per dare una rappresentazione planimetrica e altimetrica del terreno che sia congruente alla scala della carta che deve produrre.

## 2.10 Rilievo fotogrammetrico e rilievo topografico

Sulla fase di restituzione si tornerà più avanti; merita però fare subito una riflessione sul motivo per cui la fotogrammetria ha, in pratica, soppiantato la topografia come metodo di costruzione della cartografia.

A chiusura della descrizione della costruzione della cartografia col metodo topografico (v. Cap. V) abbiamo sottolineato l'onerosità di tale metodo, che implica che squadre di operatori si rechino sul terreno da rilevare e rilevino ogni singolo punto ponendo preventivamente su di esso una stadia o un prisma riflettente; abbiamo inoltre sottolineato come il lavoro del topografo sia condizionato dagli eventi atmosferici, dalle asperità della natura o dall'interferenza del traffico, e infine come sia costoso implicando la trasferta di operatori in luoghi lontani dalla sede della Ditta.

Con la fotogrammetria invece l'unico collo di bottiglia è rappresentato dalla ripresa aerea e dalla determinazione dei punti di appoggio (ma vedremo tra poco che questa fase viene oggi molto sveltita dall'uso della triangolazione aerea); per il resto si tratta essenzialmente di svolgere un lavoro d'ufficio davanti al restitutore e senza allontanarsi dalla sede della Ditta.

Nel rilievo topografico ogni punto rilevato in campagna aveva un costo enormemente superiore a quello di un punto ottenuto per collimazione sul modello stereoscopico; il topografo doveva quindi limitare al massimo il numero di punti da rilevare sul terreno per stare in limiti di costi accettabili; l'operatore al restitutore non ha questo problema e può quindi abbondare nel restituire punti e quindi produrre con facilità una carta più dettagliata.

Vi è poi un altro fatto: nel rilievo topografico la fase delle misure sul terreno per acquisire gli elementi per costruire la carta e quella della costruzione della carta vera e propria, erano due momenti separati: il topografo doveva infatti rilevare i punti sul terreno e quindi, dopo esser rientrato in sede dalla zona delle operazioni di campagna (l'una dall'altra potevano distare anche centinaia di km), procedeva all'esecuzione dei calcoli e al disegno della carta; se nella

fase di disegno qualcosa non tornava, non vi era la possibilità di effettuare un controllo sul terreno, perché ciò avrebbe implicato un viaggio aggiuntivo sul luogo del rilievo, e quindi si cercava, con l'esperienza, di sanare la lacuna. Il restituitista può invece controllare continuamente la corrispondenza della carta che via via produce, col modello del terreno che ha sempre sott'occhio e questo va a vantaggio di una maggior completezza e di una miglior qualità della carta.

Questi sono solo alcuni dei motivi che rendono il rilievo cartografico fotogrammetrico più rapido, più economico e più completo del rilievo topografico classico, e che quindi hanno portato la fotogrammetria a soppiantare la topografia nel rilievo cartografico.

C'è da dire però che, *per i rilievi a grandissima scala*, il rilievo topografico sopravvive ancora, perché è in grado di dare precisioni metriche superiori a quelle che la fotogrammetria può dare. Inoltre l'esistenza degli strumenti topografici *total station* con la registrazione automatica delle misure, l'immissione automatica dei dati di misura nel PC, l'uso del PC per l'esecuzione dei calcoli delle coordinate dei punti e, a partire da queste, il tracciamento automatico della carta mediante *plotter*, ha reso la produzione di cartografia mediante il rilievo topografico molto più rapida ed economica di quello che fosse qualche decina d'anni addietro.

## 2.11 *La triangolazione aerea a modelli indipendenti*

La triangolazione aerea è una tecnica fotogrammetrica che ha lo scopo di fornire le coordinate dei punti di appoggio per i modelli stereoscopici di un rilievo fotogrammetrico.

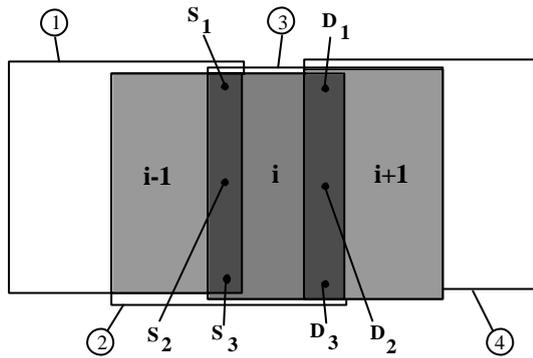
La triangolazione aerea ha origini *antiche*, nel senso che già nei primi anni '50, quando ancora esisteva solo la fotogrammetria analogica, già esistevano metodi per realizzare la triangolazione aerea con gli strumenti analogici, tanto era fin d'allora l'interesse a ridurre il costo delle operazioni topografiche a terra.

Dalla triangolazione aerea analogica si passò poi a quella *semianalitica* a metà degli anni sessanta, e da questa si è originato il metodo di triangolazione aerea analitica che, tra tutti quelli realizzati, è stato quello più usato fino ad oggi (1996) e che va sotto il nome di triangolazione aerea *a modelli indipendenti*.

### 2.11.1 *Struttura del blocco, punti nadirali, di legame e di appoggio*

Prima di procedere alla descrizione della triangolazione aerea a modelli indipendenti ricordiamo (vedi punto 1.5 di questo Capitolo, figure . 12.a e 12.b) che ogni fotogramma si sovrappone col precedente e col seguente di almeno il 60%; pertanto un generico modello stereoscopico ha una striscia di sovrapposizione del 10% *a sinistra* col modello precedente e una striscia di sovrapposizione del 10% *a destra* col modello seguente. Inoltre poiché le strisciate si sovrappongono tra di loro di un 15-20% ogni modello stereoscopico ha anche una striscia di sovrapposizione *in alto* e una striscia di sovrapposizione *in basso* con i modelli delle due strisciate contigue a quella a cui appartiene. (Abbiamo messo in corsivo le dizioni *a sinistra*, *a destra*, *in alto* e *in basso* poiché esse si riferiscono a come viene disegnato il modello stereoscopico nella trattazione che andiamo facendo).

I punti del terreno che si trovano in tali zone di sovrapposizione sono collimabili in più di un modello stereoscopico.



Si dicono *punti nadirali di sinistra* tre punti del modello stereoscopico **i** che si trovano nella striscia di sovrapposizione col modello **i-1**; tali punti sono indicati con S1, S2 e S3 nella figura 26 si dicono *punti nadirali di destra* tre punti del modello **i** che si trovano nella striscia di sovrapposizione col modello **i+1**; tali punti sono indicati con D1, D2, D3 nella figura 26.

figura 26

Ovviamente, poiché i punti nadirali di sinistra stanno nella zona di sovrapposizione col modello **i-1**, essi saranno collimabili dall'operatore non solo quando esso sta osservando il modello **i**, ma anche quando nello strumento vi saranno i fotogrammi che formano il modello **i-1**; e ugualmente poiché i punti nadirali di destra stanno nella zona di sovrapposizione col modello **i+1**, essi saranno collimabili dall'operatore non solo quando esso sta osservando il modello **i**, ma anche quando nello strumento vi saranno i fotogrammi che formano il modello **i+1**.

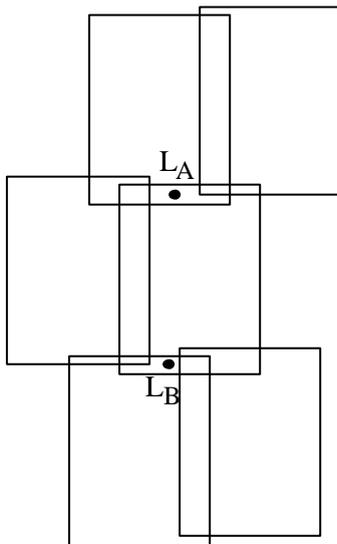


figura 27

Indichiamo poi col termine di *punti di legame* i punti che si trovano nelle zone di sovrapposizione tra due modelli di strisciate diverse (vedi figura 27) cioè nelle zone di sovrapposizione del modello che abbiamo definito *alta* e *bassa*; anche questi punti potranno essere collimati più volte, e cioè tante volte quanti sono i modelli stereoscopici in cui *cadono*.

Vi sono infine nel territorio da rilevare, cioè quello ricoperto dalle strisciate di fotogrammi, dei punti di coordinate note; la triangolazione aerea fa infatti diminuire il numero di punti a terra dei quali determinare le coordinate, ma, almeno nella triangolazione aerea a modelli indipendenti, non li può eliminare del tutto.

L'esperienza (basata su innumerevoli studi di ricerca nazionali e internazionali) ha dimostrato che occorre determinare almeno un punto in planimetria e in altimetria

nel primo e nell'ultimo modello stereoscopico di ogni striscia, e poi delle file di punti, noti anche solo in altimetria, posti nelle zone di ricoprimento trasversale tra le strisciate; tali file di punti debbono avere andamento ortogonale alla direzione delle strisciate e devono *cadere* ogni quattro o cinque modelli (vedi figura 27). L'insieme di questi punti costituiscono i punti di appoggio del blocco di strisciate o, più semplicemente, del blocco.

### 2.11.2 Le operazioni di misura

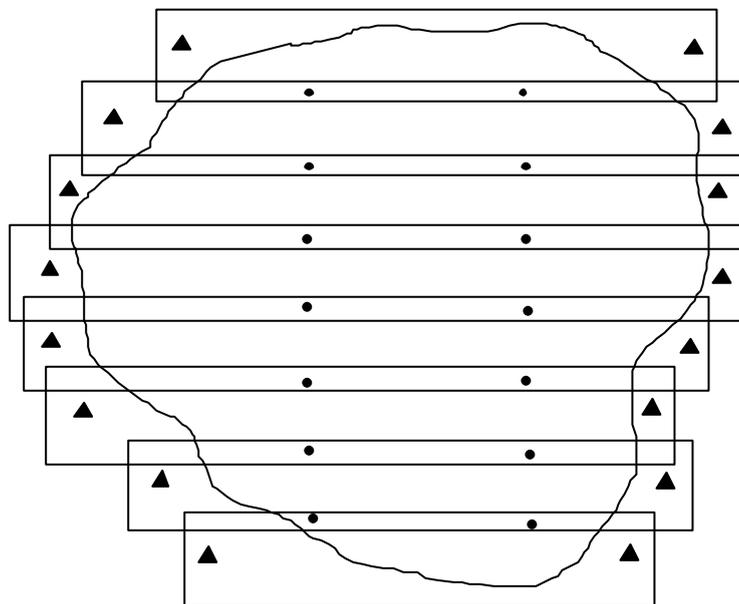
Le operazioni di misura necessarie all'esecuzione della triangolazione aerea a modelli indipendenti di un blocco di strisciate sono le seguenti:

- si esegue l'orientamento relativo di tutti i modelli stereoscopici di tutte le strisciate, cioè di tutti i modelli che compongono il rilievo;
- per ogni generico modello stereoscopico  $i$ , l'operatore, dopo aver formato il modello, memorizza:
  - \* le coordinate dei punti di presa,
  - \* le coordinate dei tre punti nadirali di sinistra,
  - \* le coordinate dei tre punti nadirali di destra,
  - \* le coordinate dei punti di legame
  - \* le coordinate dei punti di appoggio del blocco (ovviamente solo per i modelli in cui ce ne sono!).

Il metodo si chiama *a modelli indipendenti* proprio perché, nella fase di lavoro che riguarda ciascun modello, le coordinate dei punti sopra elencati vengono determinate **nel sistema di coordinate arbitrario di ciascun modello!**.

Tutte le misure effettuate vengono memorizzate in modo tale che siano elaborabili da un programma di calcolo.

Sottolineiamo che le operazioni di misura per effettuare la triangolazione aerea non hanno nulla che fare con quelle che si eseguono in fase di restituzione, in quanto vengono effettuate in una fase precedente del lavoro; anzi sarà opportuno ricordare che nelle Ditte fotogrammetriche molte volte la triangolazione aerea viene fatta su uno strumento analitico più preciso di quelli che poi vengono usati per la fase di restituzione vere e propria.



- ▲ punti planoaltimetrici
- punti altimetrici

figura 28

Cioè l'organizzazione del lavoro nelle Ditte, almeno i quelle di una certa dimensione, è quella di avere uno strumento analitico sul quale viene fatta la triangolazione aerea per determinare i punti di appoggio di diversi blocchi, la cui restituzione avviene su diversi altri strumenti.

### 2.11.3 Il programma di calcolo

Dopo aver eseguito questa fase di misure si esegue il calcolo del blocco, mediante un apposito programma di calcolo (ne esistono diversi, tutti basati sullo stesso concetto di base).

Il programma si basa su questo concetto: bisogna determinare per ogni modello una rototraslazione e una variazione di scala in modo che siano soddisfatte queste due condizioni:

- applicando alle coordinate  $(X, Y, Z)$  di un generico punto di appoggio osservato nel modello  $i$  i parametri di rototraslazione e variazione di scala determinati dal programma per tale modello, si devono ottenere le coordinate  $N, E, Q$  del punto di appoggio nel sistema di riferimento assoluto;
- un generico punto nadirale o di legame, comune a due modelli  $i$  e  $j$ , dovrà avere le stesse coordinate assolute, sia che esse siano ottenute applicando alle coordinate arbitrarie  $X, Y, Z$  del punto nel modello  $i$  i parametri di rototraslazione e di variazione di scala del modello  $i$ , sia che esse siano ottenute applicando alle coordinate arbitrarie  $X, Y, Z$  del punto nel modello  $j$  i parametri di rototraslazione e di variazione di scala del modello  $j$ .

La prima condizione si realizza applicando per tutti i punti di appoggio la seguente relazione:

$$\begin{aligned} E_i &= A_k + \Lambda_k (a_{11} X_{i,k} + a_{12} Y_{i,k} + a_{13} Z_{i,k}) \\ N_i &= B_k + \Lambda_k (a_{21} X_{i,k} + a_{22} Y_{i,k} + a_{23} Z_{i,k}) \\ Q_i &= C_k + \Lambda_k (a_{31} X_{i,k} + a_{32} Y_{i,k} + a_{33} Z_{i,k}) \end{aligned} \quad (17)$$

nella quale:

- $E_i, N_i, Q_i$  sono le coordinate note del punto di appoggio  $i$  nel sistema assoluto
- $X_{i,k}, Y_{i,k}, Z_{i,k}$  sono le coordinate del punto determinate nel sistema arbitrario di riferimento del modello  $k$
- le traslazioni  $A_k, B_k, C_k$ , gli elementi  $a_{ij}$  della matrice di rotazione (che contengono le rotazioni  $\Omega, \Phi, K$ ) e il coefficiente di scala  $\Lambda_k$ , sono quelli del modello  $k$  nel quale sono state osservate le coordinate  $X_{i,k}, Y_{i,k}, Z_{i,k}$ , del punto di appoggio  $i$ .

Se il punto di appoggio  $i$  fosse stato osservato anche nel modello  $m$ , perché situato in una zona di sovrapposizione tra il modello  $i$  ed il modello  $m$ , le (17) dovrebbero essere anche per il modello  $m$ ; in pratica nelle (17) al pedice  $k$  si dovrebbe sostituire il pedice  $m$ .

Notiamo inoltre che se il punto di appoggio fosse noto solo in planimetria, per esso si dovrebbero scrivere solo le prime due delle (17); mentre se di esso fosse nota solo la quota si dovrebbe scrivere solo la terza.

Per i punti nadirali o di legame le equazioni da scrivere sono le seguenti (dove con  $i$  si è indicato un generico punto nadirale o di legame situato in una zona di sovrapposizione tra due modelli e  $k$  e  $j$ ):

$$\begin{aligned} A_k + \Lambda_k (a_{11k} X_{i,k} + a_{12k} Y_{i,k} + a_{13k} Z_{i,k}) &= A_j + \Lambda_j (a_{11j} X_{i,j} + a_{12j} Y_{i,j} + a_{13j} Z_{i,j}) \\ B_k + \Lambda_k (a_{21k} X_{i,k} + a_{22k} Y_{i,k} + a_{23k} Z_{i,k}) &= B_j + \Lambda_j (a_{21j} X_{i,j} + a_{22j} Y_{i,j} + a_{23j} Z_{i,j}) \\ C_k + \Lambda_k (a_{31k} X_{i,k} + a_{32k} Y_{i,k} + a_{33k} Z_{i,k}) &= C_j + \Lambda_j (a_{31j} X_{i,j} + a_{32j} Y_{i,j} + a_{33j} Z_{i,j}) \end{aligned} \quad (18)$$

Nelle (18) le espressioni a sinistra dell'uguale rappresentano le coordinate del punto  $i$  rilevate nella fase di orientamento relativo del modello  $k$ , trasformate nel sistema assoluto in funzione degli elementi di rototraslazione e variazione di scala del modello  $j$ . Le espressioni a destra dell'uguale rappresentano le coordinate del medesimo punto  $i$  rilevate nella fase di orientamento relativo del modello  $j$ , trasformate nel sistema assoluto in funzione degli elementi di rototraslazione e variazione di scala del modello  $j$ .

Al pedice del generico elemento delle matrici  $a_{ij}$  si è aggiunto un  $k$  o un  $j$  per indicare che, nelle equazioni a sinistra dell'uguale esse contengono le rotazioni  $\Omega, \Phi, K$  del modello  $k$  e, nelle equazioni a destra dell'uguale contengono le rotazioni  $\Omega, \Phi, K$  del modello  $j$ .

Un stesso punto nadirale  $o$  di legame può generare anche più di una tripletta di equazioni (18); si consideri ad esempio il caso (vedi figura 29) in cui un punto venga usato come punto nadirale *alto* in due modelli di una strisciata, e venga usato come punto nadirale *basso* in due modelli della strisciata adiacente; esso darà luogo addirittura a quattro triplette di equazioni (18).

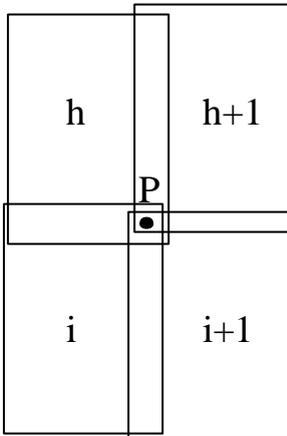


figura 29

È detta *molteplicità* di un punto nel blocco il numero di modelli in cui cade quel punto. In genere i punti nadirali hanno molteplicità due o tre; ma possono avere anche molteplicità maggiore.

Nel caso appena fatto, ad esempio, il punto ha molteplicità 4.

Sulla base dei concetti esposti sono stati sviluppati diversi programmi di calcolo dei blocchi di strisciate; tutti sono in pratica basati sulla determinazione delle incognite col metodo delle osservazioni indirette.

Ciò che li differenzia è il modo di gestire i dati di input. Si tenga presente infatti che i problemi difficili da risolvere in un programma di questo genere non sono certo il calcolare le derivate parziali delle (17) o delle (18), o impostare una volta

per tutte i coefficienti del sistema normale; la difficoltà è studiare il modo di numerare i modelli e i punti nei modelli in modo che siano riconoscibili in modo univoco; e ancora: individuare in quanti modelli cade uno stesso punto, e così via.

Altra difficoltà risiede nel risolvere il sistema normale, che molto spesso ha dimensioni ragguardevoli. Infatti se  $n$  sono i modelli del blocco, le incognite saranno  $7 \cdot n$  e quindi le dimensioni della matrice del sistema normale saranno  $(7 \cdot n)^2$ . Ad esempio in un blocco di trecento modelli (dimensione abituale e non tra le maggiori di un blocco) le dimensioni della matrice sarebbero di  $2100^2$ .

Al termine delle elaborazioni il programma determina quindi i 7 parametri incogniti per ciascun modello; in funzione di essi, applicando le (17), è possibile ricavare le coordinate dei punti nadirali e dei punti di legame nel sistema assoluto.

Poiché tutti i punti hanno almeno molteplicità due, essi possono essere calcolati con i parametri di almeno due modelli; se ne calcola perciò le coordinate nei vari modelli e se prende come valore definitivo la media.

#### 2.11.4 *Valutazione della precisione del calcolo del blocco*

La precisione del calcolo del blocco può venir valutata in modi più o meno raffinati, sui quali qui non entriamo nel merito.

Ricordiamo solo, a titolo d'esempio, che uno dei modi più semplici, ma anche più significativi, per valutare la precisione del calcolo del blocco è quello di calcolare gli scarti residui dopo la determinazione delle incognite delle (17) e delle (18). Gli scarti delle (17) rappresentano la differenza tra le coordinate note dei punti di appoggio e quelle che si ricavano applicando alle loro coordinate modello i rispettivi parametri determinati dal programma; Gli scarti delle (18) rappresentano le discrepanze tra le coordinate di uno stesso punto nadirale, o di legame, quando vengono calcolate con i parametri di due diversi modelli.

#### 2.11.5 *Uso dei risultati della triangolazione aerea*

Il risultato dell'operazione della triangolazione aerea è quello di aver calcolato, in funzione dei pochi punti di appoggio del blocco, le coordinate dei punti nadirali e di legame di tutti i modelli del blocco di strisciate nel sistema di riferimento assoluto N,E,Q.

Cioè, a seguito della triangolazione aerea, si hanno sei punti, almeno, di coordinate note per eseguire l'orientamento assoluto dei modelli stereoscopici.

Pertanto, dopo l'esecuzione della triangolazione aerea, inizierà la fase di restituzione vera e propria; e cioè ogni coppia di fotogrammi verrà rimessa nello strumento restitutore, verrà rieseguito l'orientamento interno, quello relativo e infine quello assoluto basato appunto sui punti nadirali di sinistra e di destra del modello, le cui coordinate, lo ripetiamo ancora, sono state appunto determinate mediante la triangolazione aerea. Dopo aver eseguito queste operazioni l'operatore procede alla fase di restituzione.

### 2.12 *La triangolazione aerea a stelle proiettive con punti di appoggio e quella integrata da dati GPS*

Abbiamo descritto al precedente punto 2.11 la triangolazione aerea a modelli indipendenti, che come abbiamo detto è ancor oggi (anno 1996) il metodo di triangolazione aerea più usato.

Il progredire degli studi nel campo della triangolazione aerea e i risultati del progresso tecnologico stanno però portando all'attenzione delle Ditte fotogrammetriche altri modi di effettuare la triangolazione aerea, che probabilmente costituiranno in futuro delle valide alternative alla triangolazione aerea a modelli indipendenti.

Descriviamo qui brevemente il metodo *a stelle proiettive* in due sue versioni e cioè quello basato sui tradizionali punti di appoggio e quello basato sui dati GPS.

#### 2.12.1 *La triangolazione aerea a stelle proiettive con punti di appoggio*

Questo metodo di triangolazione aerea è così chiamato perché prende in considerazione come elemento del blocco non il modello stereoscopico, ma il singolo fotogramma, o meglio il fascio di raggi che, dal punto di presa, proiettano i punti immagine del fotogramma.; è appunto questo ideale fascio di raggi, inteso come *stella di direzioni proiettanti i punti* che dà origine al nome di questo tipo triangolazione aerea .

La base teorica del metodo della triangolazione aerea a stelle proiettive è semplice; basta considerare l'equazione di collinearità per un generico punto  $P_i$  di un generico fotogramma  $j$  del blocco:

$$\frac{X_i - X_j^0}{Z_i - Z_j^0} = \frac{a_{11j}x_{ij} + a_{12j}y_{ij} + a_{13j}z_{ij}}{a_{31j}x_{ij} + a_{32j}y_{ij} + a_{33j}z_{ij}}$$

$$\frac{Y_i - Y_j^0}{Z_i - Z_j^0} = \frac{a_{21j}x_{ij} + a_{22j}y_{ij} + a_{23j}z_{ij}}{a_{31j}x_{ij} + a_{32j}y_{ij} + a_{33j}z_{ij}}$$

vediamo che essa contiene:

- le coordinate  $X_i, Y_i, Z_i$  del punto  $P$  nel sistema assoluto; queste coordinate saranno per la maggior parte dei punti non note; saranno note solo per i punti di appoggio del blocco
- le coordinate lastra  $x_{i,j}, y_{i,j}$  del punto immagine di  $P_i$  sul fotogramma  $j$
- i parametri di orientamento del fotogramma  $X_j^0, Y_j^0, Z_j^0, \omega_j, \phi_j, \kappa_j$

Consideriamo ora la situazione generica di un blocco di strisciate quale l'abbiamo descritta nel metodo di triangolazione aerea a modelli indipendenti; ci riferiamo cioè al fatto di avere punti del terreno che danno la loro immagine su più fotogrammi, e di avere punti noti che servono per appoggiare il blocco nel suo complesso.

Per tutti questi punti possiamo scrivere l'equazione di collinearità riferita ; otterremo un grande sistema di equazioni di collinearità nel quale:

- in tutte le equazioni saranno note le coordinate  $x_{i,j}, y_{i,j}$  del punto immagine
- in ogni equazione saranno incogniti i parametri di orientamento del fotogramma  $X_j^0, Y_j^0, Z_j^0, \omega_j, \phi_j, \kappa_j$
- nella maggior parte delle equazioni saranno incognite anche le coordinate assolute dei punti  $X_i, Y_i, Z_i$  ; esse saranno note solo per i punti di appoggio del blocco.

Anche se in questo metodo di triangolazione aerea prendiamo in considerazione i fotogrammi e non i modelli stereoscopici, possiamo ancora ricorrere al concetto di *molteplicità* di un punto; diremo cioè che un punto ha molteplicità due se la sua immagine esiste su due fotogrammi del blocco, ha molteplicità tre se esiste su tre fotogrammi e in genere avrà molteplicità  $n$  se compare su  $n$  fotogrammi.

Per ogni punto, concettualmente corrispondente a quello che era un punto o nadirale o di legame della triangolazione aerea a modelli indipendenti, che ha molteplicità  $n$ , potremo scrivere  $n$  equazioni di collinearità, dove saranno sempre le stesse, anche se incognite, le coordinate  $X_i, Y_i, Z_i$  assolute del punto.

Anche per un generico punto di appoggio del blocco, se  $n$  è la sua molteplicità, potremo scrivere  $n$  equazioni di collinearità, dove saranno però note le coordinate assolute  $X_i, Y_i, Z_i$  del punto.

Scrivendo dunque tutte queste possibili equazioni, si ottiene un sistema in cui si hanno simultaneamente come incognite i parametri di orientamento  $X_j^0, Y_j^0, Z_j^0, \omega_j, \phi_j, \kappa_j$  di ogni fotogramma e le coordinate assolute  $X_i, Y_i, Z_i$  di ogni punto nadirale o di legame.

Con riferimento alla figura 30 si vede come, ad esempio, il punto P abbia molteplicità 5, in quanto la sua immagine compare sui fotogrammi 2,3,4,6 e 7, dando luogo a 5 equazioni di collinearità.

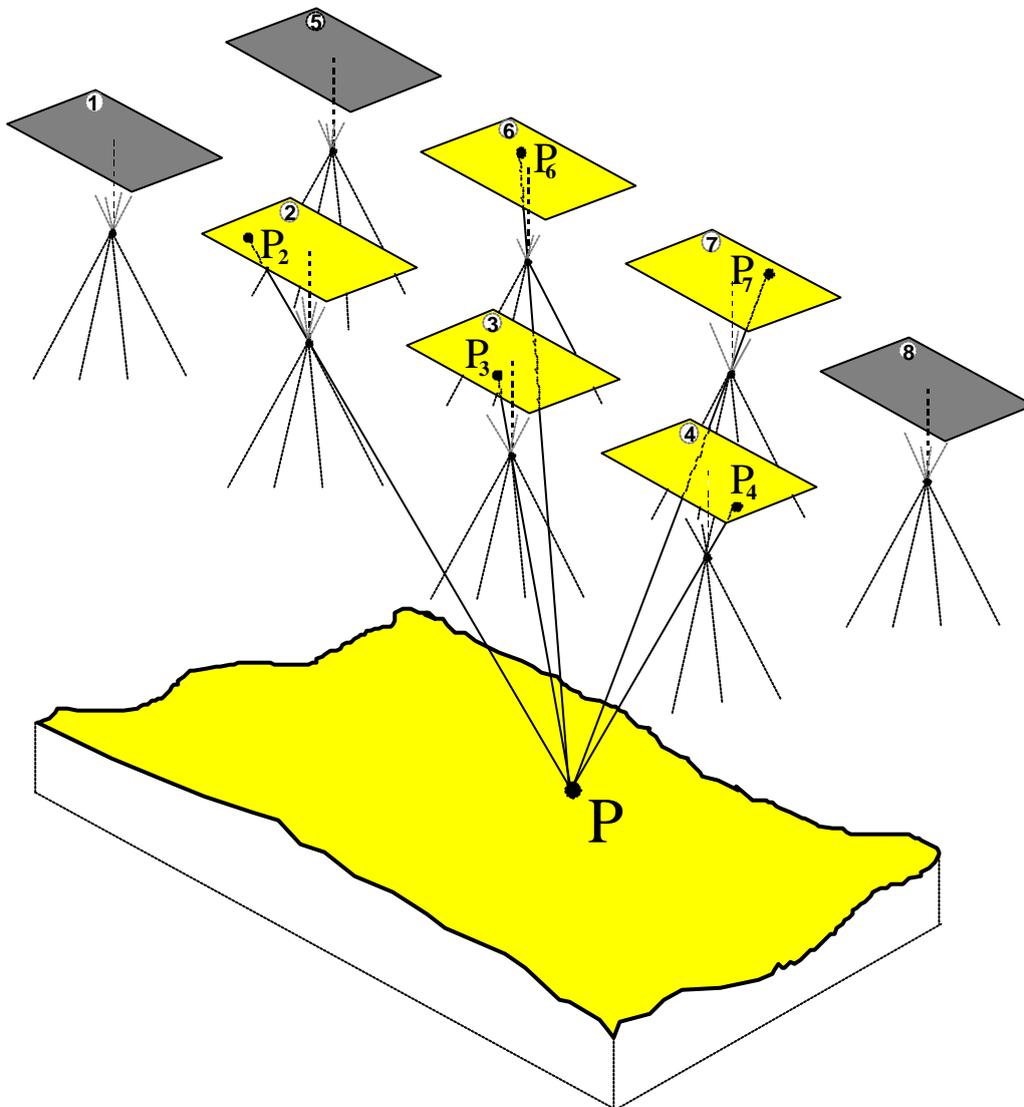


figura 30

Nel sistema le equazioni relative ai punti del tipo nadirali o di legame, hanno esclusivamente la funzione di ricreare l'orientamento relativo dei fotogrammi, mentre le equazioni relative ai punti di appoggio posizionano correttamente il blocco di fotogrammi nel sistema assoluto.

La soluzione del sistema porta alla determinazione delle coordinate dei punti nadirali e di legame e quindi danno la possibilità di procedere all'orientamento assoluto dei modelli, come avveniva con la triangolazione aerea a modelli indipendenti.

La differenza tra il metodo a stelle proiettive e quello a modelli indipendenti, consiste più che altro in un diverso approccio concettuale al problema, ma dal punto di vista pratico non vi è

gran differenza in quanto entrambi richiedono la determinazione di un certo numero di punti di appoggio del blocco.

### 2.12.2 *La triangolazione aerea a stelle proiettive con dati GPS*

Abbiamo visto al capitolo VII che con la tecnologia GPS è possibile determinare anche la posizione di punti in movimento ed in particolare la posizione della camera da presa al momento della presa di un fotogramma, o per meglio dire le coordinate assolute dell'origine della terna del sistema di riferimento interna della camera da presa.

Consideriamo allora di aver eseguito le riprese di un blocco di fotogrammi ed aver determinato, mediante il metodo del GPS cinematico, le coordinate dei punti di presa  $X_j^0, Y_j^0, Z_j^0$ , di tutti i fotogrammi.

Impostando nuovamente la soluzione del blocco con la metodologia delle stelle proiettive avremmo la sostanziale differenza di conoscere per ogni fotogramma le coordinate assolute dell'origine della terna del sistema di riferimento interno per ogni fotogramma. Nelle equazioni di collinearità, come parametri incogniti di orientamento di ogni fotogramma, rimarranno solo i parametri angolari  $\omega_j, \phi_j, \kappa_j$ .

I punti di presa saranno quindi già posizionati in maniera corretta nel sistema di riferimento assoluto, sostituendosi, nel calcolo del blocco, alla funzione svolta dai punti di appoggio, mentre il sistema delle equazioni di collinearità porterà alla determinazione dell'orientamento relativo dei fotogrammi e alla determinazione delle coordinate dei punti nadirali e di legame.

L'innovazione introdotta da questo metodo è quindi quello di eliminare la necessità di determinare punti di appoggio a terra. In realtà, per controllo, si usano ancora quattro soli punti di appoggio a terra situati nei quattro spigoli del blocco.

Volendo ridimensionare la portata innovativa di questo metodo si possono fare delle considerazioni e cioè:

- che la tecnica del GPS cinematico è tecnologicamente molto avanzata e richiede particolari capacità operative
- che la determinazione dei punti di appoggio a terra è anch'essa molto più agevole da quando le operazioni topografiche classiche possono essere integrate, o addirittura sostituite, dall'uso del GPS per la determinazione delle coordinate dei punti del terreno
- che esistono comunque nella nostra realtà italiana, e potremmo dire europea, molti punti a terra di coordinate note, e quindi è un peccato non usarli.

In effetti queste considerazioni hanno la loro validità.

Possiamo allora concludere dicendo che il metodo di triangolazione aerea a stelle proiettive integrato dall'uso del GPS cinematico trova la sua massima validità di impiego proprio quando si deve operare in territori dove non esistono, o sono diventate obsolete, le reti nazionali di vertici trigonometrici, o dove le operazioni sul terreno sono rese molto complesse per la natura del territorio. Si pensi ad esempio al caso di dover rilevare vaste zone di nazioni africane mai inquadrare in sistemi cartografici nazionali e coperte da fitta vegetazione che ostacola i movimenti sul terreno.

### 3. Iter per la realizzazione di un rilievo con metodo fotogrammetrico.

#### 3.1 Progettazione ed allestimento del materiale necessario per la costruzione di una carta.

Si suppone di dover eseguire il rilievo fotogrammetrico alla scala  $1 : n$  di una certa zona.

Poiché esistono tabelle che danno l'altezza relativa ottimale di volo in funzione del fattore di scala della carta che si vuole costruire, noto il fattore  $1 : n$  è anche definito il valore  $H$ .

Dal valore di  $H$  si risale alla scala media del fotogramma tramite la relazione:

$$\frac{1}{s_f} = \frac{0.150}{H}$$

essendo 0.150 il valore, espresso in metri, della distanza principale.

Tenuto conto che il formato standard dei fotogrammi per fotogrammetria aerea è 0.23 m x 0.23 m, una volta imposto  $s_f$  si calcola la dimensione reale  $L$  del lato di ciascun fotogramma

$$L = 0.23 \cdot s_f \quad (\text{in metri})$$

Ci si procura a questo punto della cartografia ufficiale, ad esempio della cartografia IGM alla scala 1:100.000, sulla quale si riporta il contorno della zona da rilevare.

Si calcola il valore che il lato del fotogramma ha alla scala 1:100.000

$$L' = L / 100000$$

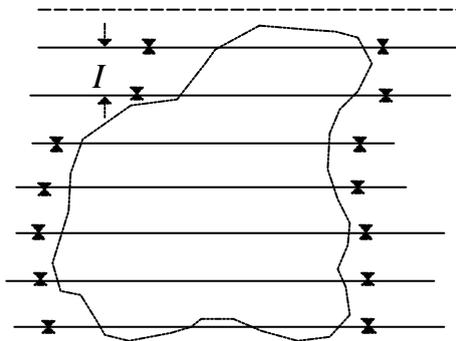


figura 31

Avendo scelto di riprendere tale zona con strisciate ad andamento Est-Ovest, si traccia il bordo superiore della prima striscia; esso dovrà ovviamente essere tracciato esternamente al limite della zona da cartografare almeno del 20% della dimensione del lato  $L'$ . Si traccia l'asse della prima striscia distanziato di  $L'/2$  dal bordo tracciato.

Si calcola quindi il valore dell'interasse  $I$  fra le strisciate

$$I = 0.8 \cdot L'$$

dove il fattore 0.8 tiene conto del fatto che le strisciate, ciascuna di dimensione trasversale  $L'$ , devono sovrapporsi del 20%.

Si riportano quindi gli assi di tutte le strisciate parallelamente al primo e distanziati di  $I$ .

Accanto a ciascun asse si scrive la quota effettiva di volo alla quale la strisciata dovrà essere ripresa. La quota effettiva di volo si ottiene sommando ad H la quota media del terreno.

L'elaborato così costruito si definisce *piano di volo*.

Il piano di volo viene consegnato alla Ditta esecutrice dei voli, che, non appena si verificano le condizioni meteorologiche favorevoli, può effettuare, sulla base di esso, le riprese aeree e fornire i fotogrammi relativi alla zona richiesta, alla scala media stabilita.

Nel frattempo la sezione topografica della Ditta cui è affidata la costruzione della carta, procede alle operazioni di costruzione della rete di inquadramento del rilievo, reperendo i vertici trigonometrici esistenti nella zona, infittendoli mediante triangolazione tecnica, infittendoli ulteriormente mediante intersezioni in avanti ed inverse.

Eseguite le riprese aeree sulla base dei fotogrammi è possibile realizzare il *quadro d'unione* di essi; il quadro d'unione si ottiene riportando sulla cartografia alla scala 1:100.000 l'effettivo contorno dei fotogrammi.

Definito il quadro d'unione, si scelgono sui fotogrammi i punti d'appoggio necessari per la determinazione dell'orientamento assoluto di ciascun modello; questi punti devono essere ben visibili sui fotogrammi e ben disposti nel modello.

La sezione topografica della Ditta, cui è affidata la costruzione della carta, completa il suo lavoro reperendo i *punti fotografici* sul terreno, collegando tali punti, mediante poligoni, ai punti della rete precedentemente realizzata e determinando le coordinate (N,E,Q) di questi punti fotografici che serviranno per l'appoggio dei modelli.

### 3.2 Restituzione fotogrammetrica.

Perché si possa procedere alla fase di restituzione fotogrammetrica deve essere disponibile il seguente materiale:

- copia diapositiva su materiale indeformabile trasparente (generalmente poliestere) dei fotogrammi;
- copia a stampa su carta dei fotogrammi sui quali sono stati evidenziati i punti di appoggio scelti;
- tabulati sui quali sono riportate le coordinate (N,E,Q) dei punti d'appoggio.

Nel diagramma a blocchi n.2 vengono riepilogate sinteticamente le operazioni che si effettuano nella fase di restituzione fotogrammetrica, quando si costruisce cartografia mediante fotogrammetria analitica.

Le operazioni che vengono eseguite per la restituzione fotogrammetrica sono le seguenti:

1. inserimento dei due fotogrammi adiacenti nello strumento restitutore;
2. determinazione dei parametri dell'orientamento interno:

l'operatore esegue la collimazione delle quattro marche di ciascun fotogramma; è così in possesso di quattro coppie di coordinate strumentali per ciascun fotogramma  $U'_i, V'_i$  e  $U''_i, V''_i$ ; il calcolatore connesso allo stereorestitutore mediante la routine dell'orientamento interno, note le  $U'_i, V'_i$  e  $U''_i, V''_i$  delle marche sui due fotogrammi e note le coordinate nominali delle marche per la camera da presa (che sono riportate sul certificato di taratura

della camera stessa), determina i valori dei parametri di passaggio dai sistemi (U',V') e (U'',V'') ai sistemi (x',y'), (x'',y'');

3. determinazione dei parametri dell'orientamento relativo:

l'operatore esegue la collimazione stereoscopica di un certo numero di n punti omologhi, (n = 10-12). Il calcolatore, mediante la routine dell'orientamento relativo, note le coordinate  $x'_i, y'_i$  e  $x''_i, y''_i$  dei punti collimati determina i parametri dell'orientamento relativo e cioè  $\kappa_1, \phi_1, \kappa_2, \phi_2, \omega_2$ ;

4. determinazione dei parametri dell'orientamento assoluto:

l'operatore esegue la collimazione stereoscopica di quei punti *fotografici* d'appoggio dei quali sono note le coordinate Gauss-Boaga; il calcolatore, mediante la routine dell'orientamento assoluto, determina appunto i parametri dell'orientamento assoluto  $K, \Phi, \Omega, N_0, E_0, Q_0, \Lambda$  di passaggio fra il sistema arbitrario dell'orientamento relativo e il sistema Gauss-Boaga;

5. restituzione di tutti i punti che devono essere riportati in cartografia:

- l'operatore collima le coppie di punti omologhi, dei quali automaticamente vengono acquisite dal calcolatore le coordinate  $U'_i, V'_i$  e  $U''_i, V''_i$ ; le coppie di coordinate  $U'_i, V'_i$  e  $U''_i, V''_i$  vengono inserite nelle formule di rototraslazione dove compaiono i parametri dell'orientamento interno  $x'_0, y'_0, \alpha', \lambda'$  e  $x''_0, y''_0, \alpha'', \lambda''$  determinati nella fase 2; si ottengono le coppie di coordinate  $x'_i, y'_i$  e  $x''_i, y''_i$ ;
- le coppie  $x'_i, y'_i$  e  $x''_i, y''_i$  vengono inserite nelle formule dove compaiono i parametri dell'orientamento relativo  $\kappa_1, \phi_1, \kappa_2, \phi_2, \omega_2$  determinati nella fase 3; si ottengono le coordinate  $X_i, Y_i, Z_i$  del modello stereoscopico;
- le coordinate  $X_i, Y_i, Z_i$  vengono introdotte nelle formule di rototraslazione dove compaiono i parametri dell'orientamento assoluto  $K, \Phi, \Omega, N_0, E_0, Q_0, \Lambda$  determinati nella fase 4; si ottengono le coordinate  $E_i, N_i, Q_i$ ;
- i punti di coordinate  $E_i, N_i, Q_i$  vengono memorizzati sulle memorie di massa del calcolatore che gestisce le operazioni di restituzione; la loro rappresentazione viene eseguita automaticamente o mediante plotter, su carta da disegno oppure su video grafico.

Si deve notare che la sequenza delle operazioni di applicazione dei parametri di orientamento interno, relativo ed assoluto (fase 5) è molto veloce (perchè eseguita da elaboratore elettronico); essa avviene in un lasso di tempo minore di quello impiegato dall'operatore per spostarsi da un punto al successivo.

I dati memorizzati a seguito di queste operazioni trovano collocazione nei *file di restituzione*. L'elaborato grafico prodotto a partire da tali dati si chiama *minuta di restituzione*.

### 3.3 La revisione sul terreno.

Con l'operazione di restituzione l'operatore riporta sulla minuta di restituzione tutti i particolari naturali ed artificiali del terreno che sono visibili sulle fotografie e che devono essere riprodotti in conformità alla scala della carta. Può capitare, tuttavia, che alcuni particolari che devono essere riportati sulla carta non siano ben visibili, perché coperti dalle chiome degli alberi, o

perché defilati alla vista dall'effetto prospettico delle fotografie; oppure può capitare che l'operatore non riesca a distinguere la natura di un elemento del terreno (ad esempio non riesce a distinguere se un certo "oggetto" è un muro o una siepe). In questi casi il restituitista, cioè l'operatore che effettua la restituzione, indica sulla minuta di restituzione che quel particolare deve essere rivisto a terra.

Pertanto, dopo le operazioni di restituzione, deve essere effettuata una ricognizione sul terreno in modo da completare la restituzione stessa, risolvendo i punti dubbi ed integrando la carta con quelle informazioni che non sono visibili dalle fotografie (ad esempio linee interrato di oleodotti o metanodotti).

Con la revisione sul terreno l'originale di restituzione viene completato e con questa fase si conclude l'operazione di costruzione della cartografia per quello che riguarda il suo contenuto qualitativo e quantitativo.

Come ultima operazione la carta viene completata con i toponimi, cioè con tutte quelle scritte che consentono l'individuazione delle località, dei fiumi, dei torrenti e, se richiesta, l'individuazione di ogni via o piazza delle zone urbanizzate.

### **3.4 L'elaborato finale.**

#### **3.4.1 Editing cartografico**

Con il termine di editing si intende quella fase del lavoro di realizzazione della cartografia fotogrammetrica numerica diretta durante la quale si interviene sull'archivio di dati che costituisce la cartografia numerica, se ne visualizza il contenuto su video grafico e si procede ad eventuali correzioni e aggiornamenti dell'archivio.

Idealmente, nella fase di editing deve essere possibile la realizzazione di tutti quei tipi di intervento che nella restituzione fotogrammetrica tradizionale vengono attuati sulla minuta di restituzione e nella fase di ridisegno finale della carta.

Si interviene sui dati memorizzati:

- per integrare o correggere la codifica dei particolari restituiti,
- per riportare le integrazioni, le correzioni e gli aggiornamenti individuati grazie alle operazioni di ricognizione sul terreno o per acquisizione di dati da altra fonte
- per ricostruire le congruenze geometriche, ove necessario,
- per introdurre la toponomastica.

Si controlla che spezzate che definiscono entità campibili siano poligoni chiusi.

Vengono inoltre effettuate tutte le operazioni di intervento atte a migliorare l'aspetto estetico delle visualizzazioni nella cartografia numerica, quali ad esempio eventuali ricollocazioni delle scritte indicanti la quota dei punti quotati e delle di gronda, realizzazione di ortogonalizzazioni e parallelismi in strutture artificiali, ecc.

Sempre in questa fase si procede alla ricostruzione delle congruenze geometriche che consiste in interventi volti ad attribuire coordinate identiche a punti memorizzati che si riferiscono ad uno stesso punto fisico, ma che in fase di restituzione sono stati acquisiti più volte come afferenti ad entità diverse.

Le operazioni di editing non vengono eseguite quando le nuove coordinate che dovrebbero assumere i vertici delle spezzate originarie per costituire spezzate soddisfacenti le condizioni di ortogonalizzazione, parallelismo e/o allineamento causerebbero spostamenti dei vertici dalla posizione originaria alla posizione finale superiori alla tolleranza planimetrica della carta.

Sempre nella fase di editing viene realizzato il riporto della integrazioni numeriche derivanti dalle operazioni di ricognizione.

Tali integrazioni potranno essere inserite nell'archivio dei dati:

- introducendo direttamente le coordinate plano-altimetriche del particolare rappresentato,
- integrando con il disegno tradizionale il disegno ottenuto al plotter dal file di restituzione, e trasformando i dati integrativi in forma numerica mediante digitalizzazione; al dato planimetrico acquisito per digitalizzazione, dovrà essere associata la quota relativa.

### 3.4.2 *Il prodotto finale numerico*

Una volta realizzata la pulizia e il completamento dei dati mediante la fase di editing, la cartografia fotogrammetrica numerica può essere considerata compiuta e deve quindi essere consegnata al Committente.

Nei capitolati che regolano la produzione di lavori di questo tipo sono generalmente descritti i formati in cui i dati devono essere scritti e i supporti magnetici su cui devono essere memorizzati.

Di solito si mantiene, anche per quanto riguarda gli archivi numerici, la stessa suddivisione per fogli da sempre utilizzata per la cartografia tradizionale.

D'altra parte poiché comunque viene sempre anche effettuata la consegna di un prodotto grafico, organizzato in fogli, è comodo anche la banca dati è strutturata in pseudofogli.

Gli elaborati numerici vengono dunque consegnati per blocchi di file, ciascun blocco relativo ad uno pseudofoglio numerico.

Ogni pseudofoglio numerico si riferisce ad uno dei fogli grafici, ma il suo perimetro, di andamento irregolare, non coincide con il perimetro, rettangolare, del foglio grafico a cui si riferisce.

Il perimetro degli pseudofogli numerici viene stabilito in modo da non dividere entità con sviluppo superficiale che si trovano a cavallo di due fogli.

### 3.4.3 *Il prodotto finale grafico*

A partire dai dati memorizzati nella cartografia numerica vengono prodotti automaticamente gli elaborati grafici mediante plotter elettrostatici e termici.

Sempre nei capitolati che regolano la realizzazione di questo genere di lavori, sono descritte dettagliatamente le norme di rappresentazione dei differenti contenuti per i quali è previsto il rilievo (*repertorio dei contenuti e delle codifiche*)

Nel prodotto grafico vengono rappresentate con grafia opportuna tutte le entità memorizzate e differenziate per codice nella cartografia numerica. (Vedi anche capitolo IX)

L'elaborato grafico viene generalmente realizzato in doppia copia (con e senza campitura degli edifici).

La quota in gronda degli edifici viene riportata solamente sulla copia senza campitura.

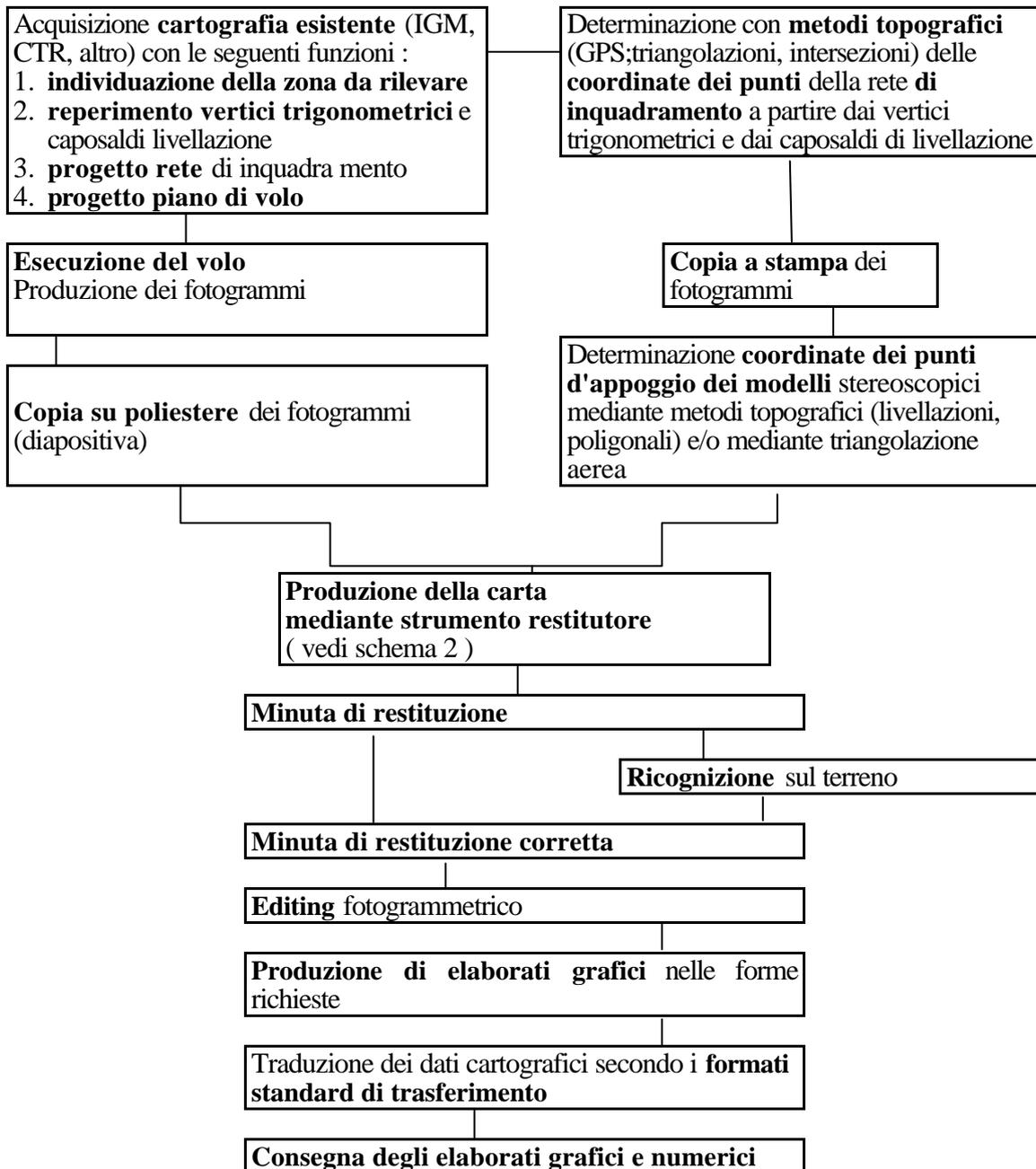
Il formato dei fogli, le legende, le titolazioni e i cartigli vengono concordati con la Committenza e la Direzione Lavori.

### ***3.5 Schemi delle fasi di realizzazione di cartografia con metodo fotogrammetrico***

Sono nel seguito riportati due schemi a blocchi; lo schema 1 descrive sinteticamente tutte le fasi di costruzione di una carta fotogrammetrica; lo schema 2 riepiloga tutte le operazioni relative alla sola fase della restituzione fotogrammetrica.

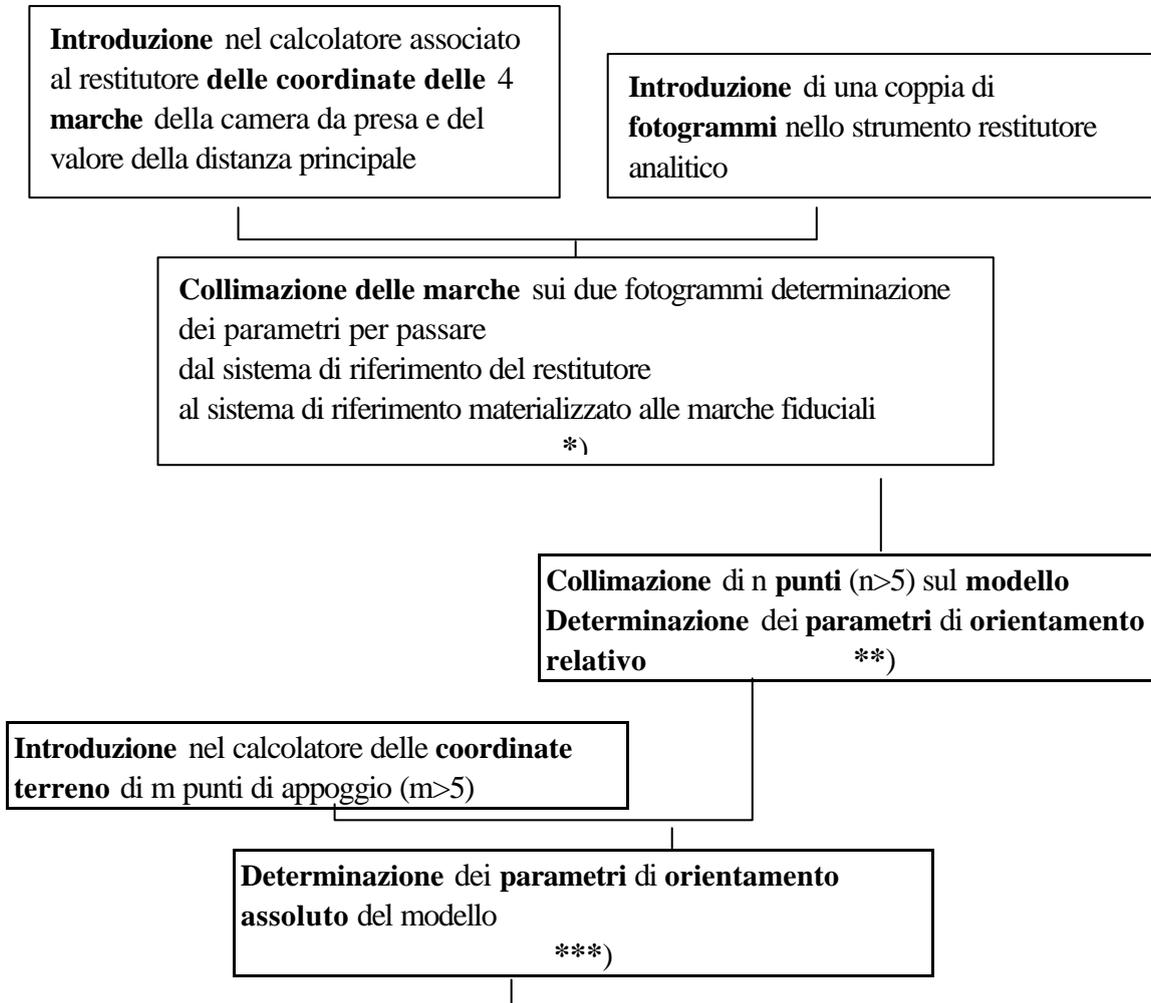
*schema 1*

**PRODUZIONE DI CARTOGRAFIA MEDIANTE FOTOGRAMMETRIA**



*schema 2*

**RESTITUZIONE FOTOGRAMMETRICA MEDIANTE RESTITUTORE ANALITICO**



- per ogni punto da riportare in cartografia*
- **Si collima stereoscopicamente il punto** e si imposta la codifica del punto stesso, **vengono automaticamente misurate le coordinate strumentali** sui fotogrammi
  - Il calcolatore opera le seguenti **trasformazioni**:
    - a) **da coordinate strumentali a coordinate lastra** mediante i parametri dell'orientamento interno \*)
    - b) **da coordinate lastra a coordinate modello** mediante i parametri dell'orientamento relativo \*\*)
    - c) **da coordinate modello a coordinate terreno** mediante i parametri dell'orientamento assoluto \*\*\*)
  - **Si visualizza il punto restituito** sul dispositivo grafico associato al restitutore analitico, (video grafico o plotter).
  - **Si procede alla memorizzazione** della codifica e delle coordinate del punto.